Variétés et formes modulaires de Hilbert arithmétiques pour $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$

Mladen Dimitrov and Jacques Tilouine

Cet article a pour origine deux exposés donnés par le second auteur à Varenna. Son contenu est cependant assez différent de celui des exposés. Il traite de certains aspects arithmétiques du lien entre les variétés et les formes modulaires de Hilbert. Plusieurs points classiques ne sont pas abordés faute de temps : opérateurs de Hecke, théorie de Serre–Tate. Par contre, cet article donne des détails sur les compactifications toroïdales de la variété abélienne de Hilbert–Blumenthal universelle (voir la partie 6), ainsi que plusieurs applications ; la plupart, si elles sont peut-être connues des experts, ne semblent pas figurer dans les publications sur ce thème ; en particulier, celles relatives à la théorie de Hodge, aux formes de poids demi-entier et de Hilbert–Jacobi nous paraissent nouvelles.

Nous avons grandement bénéficié d'un séminaire sur ce sujet que nous avons organisé au premier semestre 2001-02 à Paris 13. Nous tenons à en remercier tous les participants et en particulier G. Chenevier, Y. Henrio, A. Mokrane, S. Morel et S. Rozensztajn. Nous voulons également remercier H. Hida, qui nous a éclairés sur plusieurs points de ce travail. Une partie de cet article a été rédigée alors que le second auteur séjournait à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Münster dans le cadre de la SFB 478 sur l'invitation de C. Deninger. Il a apprécié les excellentes conditions de travail et l'atmosphère cordiale qui y règnent.

Nous avons divisé notre travail en deux articles ; ainsi ce texte est muni d'un compagnon [7] qui donne les détails sur les compactifications (toroïdales et minimale) des variétés de Hilbert–Blumenthal en niveau $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$, en particulier aux pointes ramifiées. L'organisation du présent article est la suivante :

Table des matières

1 Variétés modulaires de Hilbert analytiques

Références : [12], [34].

Notations. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré $d = d_F$, d'anneau des entiers $\mathfrak{o}$, de différente $\mathfrak{d}$ et de discriminant $\Delta_F = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{d})$. On note $J_F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{alg.}}(F, \mathbb{C})$ l'ensemble de ses plongements (réels). On abrégera $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}$.

On se donne un groupe algébrique $D_{/\mathbb{Q}}$, intermédiaire entre $\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{Q}}$ et $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, connexe :

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \hookrightarrow D \hookrightarrow \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}} .$$

On définit le groupe algébrique $G_{/\mathbb{Q}}$ (resp. $G^*_{/\mathbb{Q}}$) comme le produit fibré de D (resp. $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$) et de $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$ au-dessus de $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. On a le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{SL}_2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & G^* \arrow[r, hook] \arrow[d] & G \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\nu"] \\
1 \arrow[r, hook] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r, hook] & D \arrow[r, hook] & \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}},
\end{tikzcd}$$

où la flèche $\nu : \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2 \to \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est donnée par la norme réduite.

Le sous-groupe de Borel standard de G, son radical unipotent et son tore maximal standard sont notés B, U et T, respectivement. On pose $T_1 = T \cap \ker(\nu)$.

Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R et pour tout groupe algébrique H sur $\mathbb{Q}$, on note H_R le groupe de ses R-points.

Remarque 1.1. Dans toutes les applications le groupe G sera soit $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$, soit G^*. Nous avons préféré ne pas fixer G dès le départ, car G^* intervient dans l'étude géométrique des formes modulaires de Hilbert (le problème de modules de variétés abéliennes de Hilbert associé à G^* est représentable : voir la partie 2), alors que $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$ intervient dans l'étude arithmétique des formes modulaires de Hilbert (les variétés de Shimura associées à $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$ ne sont en général que des espaces de modules grossiers, mais on connaît l'existence de représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de Hilbert propres pour $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$). Cette présentation a été inspirée par [2].

Le domaine symétrique hermitien $\mathfrak{H}_F$. Soit $(F\otimes\mathbb{R})_+$ (resp. $G^+_{\mathbb{R}}$) la composante neutre de $(F \otimes \mathbb{R})^\times$ (resp. de $G_{\mathbb{R}}$). Le groupe $G^+_{\mathbb{R}}$ agit par homographies sur l'espace $\mathfrak{H}_F = \{z \in F \otimes \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(z) \in (F \otimes \mathbb{R})_+\} \cong \mathfrak{H}^{J_F}$, où $\mathfrak{H}$ désigne le demi-plan de Poincaré (l'isomorphisme étant donné par $\xi \otimes w \mapsto (\tau(\xi)w)_{\tau\in J_F}$).

Posons $\underline{i} = (\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1}) \in \mathfrak{H}_F$ et $K_\infty^+ = \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{R}}^+}(\underline{i})$. Alors $G_{\mathbb{R}}^+/K_\infty^+ \cong \mathfrak{H}_F$, par $g \mapsto g(\underline{i})$ d'inverse $x + \underline{i}y \mapsto \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} K_\infty^+$.

Via l'inclusion $\mathfrak{H}_F \hookrightarrow \mathbb{P}^1(F \otimes \mathbb{C})$, $z \mapsto \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$, l'action de $G_{\mathbb{R}}^+$ sur $\mathfrak{H}_F$ est compatible avec l'action naturelle de $G_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{P}^1(F \otimes \mathbb{C})$.

Les points rationnels $\mathbb{P}^1(F)$ du bord $\mathbb{P}^1(F \otimes \mathbb{R})$ de $\mathfrak{H}_F$ sont appelés les *pointes*. On pose $\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ agit transitivement sur l'ensemble des pointes. On a $B_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{Q}}}(\infty)$ et $\mathbb{P}^1(F) \cong G_{\mathbb{Q}}/B_{\mathbb{Q}}$.

On munit l'espace $\mathfrak{H}_F^* = \mathfrak{H}_F \sqcup \mathbb{P}^1(F)$ de la topologie de Satake, donnée par :

– la topologie usuelle sur $\mathfrak{H}_F$,

– pour toute pointe $\mathcal{C} \in \mathbb{P}^1(F)$, s'écrivant $\mathcal{C} = \gamma\infty$ avec $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$, un système fondamental de voisinages ouverts de $\mathcal{C}$ est donné par les $\{\gamma W_H\}_{H \in \mathbb{R}_+^*}$, où

$$W_H = \Big\{ z \in \mathfrak{H}_F \mid \prod_\tau \mathrm{im}(z_\tau) > H \Big\}.$$

L'espace $\mathfrak{H}_F^*$ est séparé (mais pas localement compact !) pour cette topologie (voir [12] I.2.9.).

Action de $G_{\mathbb{Q}}^+$ sur les $\mathfrak{o}$-réseaux. Le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ agit à gauche sur F^2, par $\gamma \cdot (m, n) = (m, n)\gamma^{-1}$, où $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ et $m, n \in F$. Soit $G_{\mathbb{Q}}^+$ le sous-groupe de $G_{\mathbb{Q}}$ formé des éléments dont le déterminant appartient au sous-groupe des éléments totalement positifs $F_+^\times$ de $F^\times$. Posons $\mathfrak{o}_+^\times = \mathfrak{o}^\times \cap F_+^\times$.

Pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{f}$ de F on pose $\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$. On a un accouplement parfait $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} : \mathfrak{f} \times \mathfrak{f}^* \to \mathbb{Z}$.

Soit L un $\mathfrak{o}$-réseau de F^2 ; c'est un $\mathfrak{o}$-module projectif de rang deux, donc il s'écrit, quitte à changer la base de F^2, comme $L = \mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*$, avec $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{f}$ des idéaux fractionnaires de F. Le stabilisateur du réseau $\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*$ dans $G_{\mathbb{Q}}^+$ est égal à :

$$G^+(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*) := \{\gamma \in G_{\mathbb{Q}}^+ | \det(\gamma) \in \mathfrak{o}_+^\times\} \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & (\mathfrak{e}\mathfrak{f})^* \\ \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{d} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$$

Lorsque $G = G^*$ (resp. $G = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathrm{GL}_2$), on écrit $\mathrm{SL}(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*)$ (resp. $\mathrm{GL}^+(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*)$), à la place de $G^+(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*)$. Notons que $\mathfrak{o}_+^\times \cap \mathbb{Q} = \{1\}$, et donc $\mathrm{SL}(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*)$ est formé d'éléments dont le déterminant vaut 1.

Lemme 1.2. *Dans la* $\mathrm{SL}_2(F)$*-orbite de tout* $\mathfrak{o}$*-réseau* L *de* F^2*, il existe un* $\mathfrak{o}$*-réseau de la forme* $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$*, avec* $\mathfrak{c}$ *un idéal fractionnaire de* F*.*

Démonstration. Il est clair que la $\mathrm{SL}_2(F)$-orbite de L contient au moins un réseau de la forme $\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*$. Prenons $a \in \mathfrak{e}$ et $c \in \mathfrak{f}\mathfrak{d}$ satisfaisant $a\mathfrak{o} + c\mathfrak{e}\mathfrak{f}^* = \mathfrak{e}$. Par le théorème de Bezout, il existe alors une matrice unimodulaire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F) \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{e} & \mathfrak{f}^* \\ \mathfrak{f}\mathfrak{d} & \mathfrak{e}^{-1} \end{pmatrix}$ et l'image de $\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*$ par cette matrice vaut $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$, avec $\mathfrak{c}^* = \mathfrak{e}\mathfrak{f}^*$. L'idéal $\mathfrak{c}^*$ est canoniquement isomorphe à $\wedge_{\mathfrak{o}}^2 L$ et donc ne dépend pas de la matrice de passage unimodulaire particulière choisie. $\square$

En vertu de ce lemme, nous ne considérerons par la suite que des $\mathfrak{o}$-réseau de la forme $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$, avec $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de F.

Remarque 1.3. Considérons le cas où $G = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathrm{GL}_2$. Alors l'application $L \mapsto \wedge_{\mathfrak{o}}^2 L$ induit une bijection entre l'ensemble des $G_{\mathbb{Q}}^+$-orbites de $\mathfrak{o}$-réseaux L de F^2 et le groupe de classes strictes d'idéaux Cl_F^+.

Notons que deux groupes $\mathrm{GL}^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)$ et $\mathrm{GL}^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}'^*)$ sont conjugués dans $G_{\mathbb{Q}}^+$, si et seulement, si les idéaux $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ appartiennent au même genre (i.e. $\mathfrak{c}' = \xi \mathfrak{e}^2 \mathfrak{c}$, avec $\xi \in F_+^\times$ et $\mathfrak{e}$ idéal de F).

Sous-groupes de congruence de $G_{\mathbb{Q}}^+$. On fixe dans la suite un idéal fractionnaire $\mathfrak{c}$ et on considère le réseau $L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$.

On se donne aussi un idéal $\mathfrak{n} \subsetneq \mathfrak{o}$. Le $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$-module $\mathfrak{n}^{-1}L_0/L_0$ est libre de rang 2. Prenons $x_0 \in F$, avec $\mathfrak{o} = \mathfrak{n} + x_0\mathfrak{c}\mathfrak{d}$. La multiplication par x_0 induit alors les isomorphismes $\mathfrak{o}/\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{c}^*/\mathfrak{c}^*\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{c}\mathfrak{d}/\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ ce qui nous permet d'identifier l'image de $\mathrm{SL}(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}^{-1}L_0/L_0)$ avec $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})$ par l'application $\begin{pmatrix} a & bx_0 \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ cx_0 & d \end{pmatrix}$, où $a, b, d \in \mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ et $c \in \mathfrak{c}\mathfrak{d}/\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{n}$. Faisons l'hypothèse :

(NT) $\mathfrak{n}$ est premier à $\mathrm{N}(\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ et $\mathfrak{n}$ ne divise ni 2, ni 3.

Soit $\Gamma_0^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = \mathrm{SL}_2(F) \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{c}^* \\ \mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{n} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$, $\Gamma^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{SL}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{n}^{-1}L_0/L_0))$ et $\Gamma_1^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \;\middle|\; d \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}} \right\}$.

La réduction modulo $\mathfrak{n}$ induit un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Gamma_1^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Gamma_0^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{SL}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \arrow[d] \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \arrow[r, hook] & \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \arrow[r, hook] & \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \arrow[r, hook] & \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})
\end{tikzcd}$$

Les groupes $\Gamma^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma_1^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma_0^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \mathrm{SL}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)$ sont des sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}_2(F)$. De même on définit les sous-groupes de congruence :

$$\Gamma(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma_0(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \mathrm{GL}^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \subset \mathrm{GL}_2^+(F),$$

$$\Gamma^D(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma_1^D(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma_0^D(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset G^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \subset G_{\mathbb{Q}}^+,$$

en remplaçant la condition d'unimodularité par celle d'avoir son déterminant appartenant à $\mathfrak{o}_+^\times$ (resp. à $\mathfrak{o}_{D+}^\times := D_{\mathbb{Q}} \cap \mathfrak{o}_+^\times$).

Lemme 1.4. *Sous l'hypothèse* **(NT)** *le groupe* $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ *est sans torsion.*

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il existe un élément de $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ d'ordre premier p. Le déterminant de cet élément est une racine de l'unité totalement positive, donc égale à 1. Cet élément admet comme valeur propre une racine de l'unité $\zeta_p \neq 1$, ainsi que son inverse ζ_p^{-1}. En prenant sa trace on trouve que ζ_p est quadratique sur F, i.e. $[F(\zeta_p):F] \leq 2$. Par ailleurs, $\zeta_p+\zeta_p^{-1}-2 \in \mathfrak{n}$, donc $\mathrm{N}(\mathfrak{n})$ est une puissance de p. D'après **(NT)** on a alors que F et $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ sont linéairement disjoints, d'où $[F(\zeta_p):F]=p-1$. On en déduit que $p=2$ ou $p=3$, ce qui implique, par un calcul facile, que $\mathfrak{n}$ divise 2 ou 3. Contradiction. □

Remarque 1.5. La condition **(NT)** est optimale pour que $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ soit sans torsion. En effet, comme les matrices $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \in \Gamma_1^1(\mathfrak{d}^{-1},(2))$ et $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix} \in \Gamma_1^1(\mathfrak{d}^{-1},(3))$ sont d'ordre fini, $\mathfrak{n}$ ne peut diviser ni 2 ni 3. Par ailleurs, la condition que $\mathfrak{n}$ soit premier à Δ_F est aussi nécessaire, comme le montre la matrice d'ordre fini $\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{\sqrt{5}-5}{2} & \frac{\sqrt{5}-3}{2}\end{pmatrix} \in \Gamma_1^1(\mathfrak{d}^{-1},(\sqrt{5}))$ (ici $F=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$). Enfin, la condition que $\mathfrak{n}$ soit premier à $\mathrm{N}(\mathfrak{c})$ est bénigne, car par le théorème d'approximation faible, chaque classe de Cl_F^+ contient des idéaux $\mathfrak{c}$ premiers à $\mathrm{N}(\mathfrak{n})$.

Dans toute la suite du texte on suppose que l'hypothèse **(NT)** *est satisfaite, de sorte que $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ soit sans torsion.*

Pointes pour les sous-groupes de congruence. Soit Γ un sous-groupe de congruence. Comme $F^\times\Gamma/F^\times$ est commensurable avec $\mathrm{PSL}_2(\mathfrak{o})$, l'ensemble de ses pointes est aussi $\mathbb{P}^1(F)$ et l'ensemble $\Gamma\setminus\mathbb{P}^1(F)$ est fini.

Les deux lemmes suivants décrivent les classes d'isomorphisme de $\Gamma_0^\bullet(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$-pointes $(\bullet=\varnothing, D, 1)$. Cette description sera utilisée dans la partie 2, où nous étudions les $\Gamma_1^\bullet(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$-pointes. Notons que $\Gamma_0^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})=G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\cap G^+(\mathfrak{o}\oplus(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*)$.

Lemme 1.6. *Soient* $\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a'\\ c'\end{pmatrix} \in F^2-\{0\}$ *et soit $\mathfrak{f}$ un idéal fractionnaire de F.*

Si $a\mathfrak{o}+c\mathfrak{f}^*=a'\mathfrak{o}+c'\mathfrak{f}^*$, alors il existe $\gamma \in \mathrm{SL}(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{f}^*)$ tel que $\begin{pmatrix}a'\\ c'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}$.

Démonstration. Posons $\mathfrak{b}=a\mathfrak{o}+c\mathfrak{f}^*$. Il existent $\gamma,\gamma' \in G_{\mathbb{Q}}^1 \cap \begin{pmatrix}\mathfrak{b} & (\mathfrak{b}\mathfrak{f})^*\\ \mathfrak{b}\mathfrak{f}\mathfrak{d} & \mathfrak{b}^{-1}\end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\gamma\infty$ et $\begin{pmatrix}a'\\ c'\end{pmatrix}=\gamma'\infty$. Comme $\gamma'\gamma^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{f}^*)$ on a le lemme. □

En notant $\mathcal{I}_F$ l'ensemble des idéaux fractionnaires et Cl_F le groupe des classes de F, on en déduit :

Lemme 1.7. *On a deux bijections :*

$$il_{\mathfrak{c}}\ :G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\setminus\left(F^2-\{0\}\right)\xrightarrow{\sim}\mathcal{I}_F,\ \begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}\mapsto\mathfrak{b}=a\mathfrak{o}+c\mathfrak{c}^*,$$

et

$$il_{\mathfrak{c}\mathfrak{n}}\ :G^+(\mathfrak{o}\oplus(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*)\setminus\left(F^2-\{0\}\right)\xrightarrow{\sim}\mathcal{I}_F,\ \begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}\mapsto\mathfrak{b}'=a\mathfrak{o}+c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*,$$

qui induisent deux bijections d'ensembles finis :

$$cl_{\mathfrak{c}} : G^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \setminus \mathbb{P}^1(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cl}_F, \quad et \quad cl_{\mathfrak{c}\mathfrak{n}} : G^+(\mathfrak{o} \oplus (\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*) \setminus \mathbb{P}^1(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cl}_F.$$

Démonstration. Les flèches sont bien définie (voir l'action de $G^+_{\mathbb{Q}}$ sur F^2 définie plus haut). Le lemme précédent donne l'injectivité. La surjectivité découle du fait que tout idéal dans un corps de nombres peut être engendré par deux de ses éléments. □

Variétés modulaires de Hilbert analytiques. Étant donné un sous-groupe de congruence Γ on définit *la variété modulaire de Hilbert analytique* $M^{\mathrm{an}} = \Gamma \setminus \mathfrak{H}_F$. La variété M^{an} est lisse, si et seulement, si Γ est sans torsion. En revanche M^{an} n'est jamais compacte.

Les variétés modulaires de Hilbert, dont nous étudierons en détail la géométrie, sont celles correspondant aux groupes de congruence $\Gamma_1^D(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$.

Compactification de Satake. L'espace quotient $M^{\mathrm{an}*} = \Gamma \setminus \mathfrak{H}_F^*$ est compact pour la topologie de Satake. Il est l'union de M^{an} et d'un nombre fini de points, appelés les pointes (voir [12] Sect.I). Il est muni d'une structure de variété analytique complexe normale pour laquelle les pointes sont des points singuliers si $d_F > 1$ (voir [12] II.4).

2 Variétés abéliennes de Hilbert–Blumenthal et formes de Hilbert

Dans la suite Γ (resp. Γ^1) désigne le sous-groupe de congruence $\Gamma_1^D(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ (resp. $\Gamma_1^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$) et on pose $M^{\mathrm{an}} = \Gamma_1^D(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \backslash \mathfrak{H}_F$ (resp. $M^{1,\mathrm{an}} = \Gamma_1^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \backslash \mathfrak{H}_F$).

Définition 2.1. Une variété abélienne à multiplication réelle par $\mathfrak{o}$ sur un schéma S est la donnée d'un schéma abélien $f : A \to S$ de dimension relative d_F et d'une injection $\iota : \mathfrak{o} \hookrightarrow \mathrm{End}(A/S)$.

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire. Pour chaque variété abélienne à multiplication réelle A/S, on définit un faisceau en $\mathfrak{o}$-modules sur le gros site étale de S en associant à un S-schéma Y le $\mathfrak{o}$-module $A(Y) \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c}$. Ce foncteur est représentable par une variété abélienne à multiplication réelle sur S, notée $A \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c}$ (voir [6]) ; elle est caractérisée par :

$$A \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c} = \begin{cases} A/A[\mathfrak{c}^{-1}], \text{ si } \mathfrak{c}^{-1} \text{ entier.} \\ (A^t \otimes \mathfrak{c}^{-1})^t, \text{ si } \mathfrak{c} \text{ entier.} \end{cases}$$

La première formule s'obtient en tensorisant par A sur $\mathfrak{o}$ la suite exacte courte $0 \to \mathfrak{o} \to \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}/\mathfrak{o} \to 0$. La seconde en résulte par dualité.

À partir de $\iota : \mathfrak{o} \hookrightarrow \mathrm{End}(A/S)$ on obtient $\mathfrak{c} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(A, A \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c})$. Soit $\mathfrak{c}_+ = \mathfrak{c} \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$. Soit $\mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}}(A, A^t)$ le $\mathfrak{o}$-module des homomorphismes symétriques de A vers A^t et $\mathcal{P}(A) \subset \mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}}(A, A^t)$ le cône des polarisations.

Définition 2.2 ([6]). Une variété abélienne A de Hilbert–Blumenthal (abrégée en VAHB) sur un schéma S est une variété abélienne à multiplication réelle par $\mathfrak{o}$, vérifiant la condition de Deligne–Pappas suivante :

(DP) il existe un isomorphisme $\mathfrak{o}$-équivariant $\lambda : A \otimes \mathfrak{c} \xrightarrow{\sim} A^t$ tel que via λ on a $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_+) \cong (\mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}}(A, A^t), \mathcal{P}(A))$.

Un tel isomorphisme λ est appelé une $\mathfrak{c}$-polarisation.

Le groupe $\mathfrak{o}_+^\times$ agit sur l'ensemble des $\mathfrak{c}$-polarisations d'une VAHB A/S.

Définition 2.3. On appelle une classe de $\mathfrak{c}$-polarisation, une orbite $\overline{\lambda}$ de $\mathfrak{c}$-polarisations sous $\mathfrak{o}_{D+}^\times = \mathfrak{o}_+^\times \cap D_{\mathbb{Q}}$.

Remarque 2.4. Si Δ_F est inversible dans S, alors la condition **(DP)** est équivalente à la condition suivante de Rapoport [30] (voir [6] Cor.2.9 et [13] Chap.3.5) :

(R) le faisceau $\underline{\omega} = f_*\Omega^1_{A/S}$ est localement libre de rang 1 sur $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$ pour la topologie de Zariski.

Définition 2.5. Une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau sur une VAHB A/S est la donnée d'une immersion fermée $\mathfrak{o}$-linéaire de S-schémas en groupes finis $\alpha : (\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$, où $(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{d}^{-1})[\mathfrak{n}]$ désigne le dual de Cartier du S-schéma constant $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$.

Remarque 2.6. Comme $\mathfrak{c}$ est premier à $\mathfrak{n}$, la $\mathfrak{c}$-polarisation λ, combinée avec l'accouplement de Weil $A[\mathfrak{n}] \times A^t[\mathfrak{n}] \to (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{d}^{-1})[\mathfrak{n}]$, donne un accouplement $\mathfrak{o}$-équivariant parfait $A[\mathfrak{n}] \times A[\mathfrak{n}] \to (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^*)[\mathfrak{n}]$. Étant donné une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau $\alpha : (\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$, à l'aide de ce dernier, on lui associe de manière canonique un morphisme $\mathfrak{o}$-linéaire surjectif de S-schémas en groupes finis $\alpha^* : A[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{c}^{-1}/\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-1}$, appelé le λ-dual de Cartier de α. On a une suite exacte :

$$0 \to (\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) \xrightarrow{\alpha} A[\mathfrak{n}] \xrightarrow{\alpha^*} \mathfrak{c}^{-1}/\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-1} \to 0$$

Construction analytique de la VAHB universelle sur $M^{1,\mathrm{an}}$. Pour tout $z \in \mathfrak{H}_F$ et $\gamma \in G_{\mathbb{R}}$ on pose $j(\gamma, z) = c \cdot z + d \in (F \otimes \mathbb{C})^\times$. D'après l'identité $j(\gamma\gamma', z) = j(\gamma, \gamma'(z))j(\gamma', z)$ on a un 1-cocycle :

$$G_{\mathbb{R}} \longrightarrow (\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{H}_F})^\times, \gamma \mapsto (z \mapsto j(\gamma, z)).$$

On pose $\mathcal{A}^{\mathrm{an}} = \Gamma^1 \backslash (\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C}))/\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$, où le groupe produit semi-direct $(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \rtimes \Gamma^1$ (pour $\gamma \cdot (m, n) = (m, n)\gamma^{-1}$) agit à gauche sur $\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C})$ par :

$$\begin{cases} \gamma(z, v) = (\gamma(z), j(\gamma, z)^{-1}v) \\ (z, v)(m, n) = (z, v + m \cdot z + n). \end{cases} \tag{1}$$

La fibre du point $\Gamma^1 z \in M^{1,\mathrm{an}}$ est la variété abélienne $\mathcal{A}_z^{\mathrm{an}} := (F \otimes \mathbb{C})/L_z$, où $L_z = (\mathfrak{o}z \oplus \mathfrak{c}^*)$. La flèche $\iota(\xi) : (z, v) \mapsto (z, \xi v)$ induit une action de $\xi \in \mathfrak{o}$ sur $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$, d'où une injection $\iota : \mathfrak{o} \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{A}^{\mathrm{an}}/M^{1,\mathrm{an}})$.

Pour tout fibré vectoriel E sur $M^{1,\mathrm{an}}$, soit $E^\vee$ le fibré dual. Il est facile de voir que $\mathrm{Lie}(\mathcal{A}^{\mathrm{an}}/M^{1,\mathrm{an}}) = \Gamma^1 \backslash (\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C}))$ et $\underline{\omega} = \mathrm{Lie}(\mathcal{A}^{\mathrm{an}}/M^{1,\mathrm{an}})^\vee$ sont localement libres de rang 1 sur $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M^{1,\mathrm{an}}}$.

Pour tout $\mathfrak{o}$-module L on a un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(L, \mathfrak{d}^{-1})$ et $L^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$, obtenu en composant avec $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}$.

On a un isomorphisme $\mathfrak{o}$-linéaire $\wedge^2_{\mathfrak{o}} L_z \cong \mathfrak{c}^*$, venant de l'accouplement parfait λ_z : $L_z \times L_z \to F \quad (u, v) \mapsto \frac{uv^c - u^c v}{2i\,\mathrm{im}(z)}$. L'application $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} \circ \lambda_z$ nous fournit un isomorphisme $L_z \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c} \cong L_z^*$, d'où une $\mathfrak{c}$-polarisation $\mathcal{A}_z \otimes \mathfrak{c} \cong \mathcal{A}_z^t$.

Si $\mathfrak{o} = \mathfrak{n} + y_0\mathfrak{c}$, la flèche $M^{1,\mathrm{an}} \times \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1} \to \mathcal{A}^{\mathrm{an}}[\mathfrak{n}]$, $(z, v) \mapsto (z, y_0 v)$ munit $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$ d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau.

Proposition 2.7. $(\mathcal{A}^{\mathrm{an}}, \iota, \lambda, \alpha)/M^{1,\mathrm{an}}$ *est une VAHB* $\mathfrak{c}$*-polarisée analytique, munie d'une* $\mu_{\mathfrak{n}}$*-structure de niveau.*

La flèche $\mathcal{A}^{\mathrm{an}} \to M^{1,\mathrm{an}}$ *est universelle, i.e. pour toute VAHB analytique* A/S *munie d'une* $\mu_{\mathfrak{n}}$*-structure de niveau et d'une* $\mathfrak{c}$*-polarisation, il existe une unique flèche* $\varphi : S \to M^{1,\mathrm{an}}$ *et un unique isomorphisme de VAHB munies de* $\mu_{\mathfrak{n}}$*-structure de niveau et de* $\mathfrak{c}$*-polarisation* $A \cong \mathcal{A}^{\mathrm{an}} \times_{M^{1,\mathrm{an}}} S$*. En particulier, si* A *est une VAHB complexe munie d'une* $\mu_{\mathfrak{n}}$*-structure de niveau et d'une* $\mathfrak{c}$*-polarisation, il existe un unique point* $z \in M^{1,\mathrm{an}}$ *et un unique isomorphisme* $A \cong \mathcal{A}_z^{\mathrm{an}}$.

Idée de la démonstration. Il est clair que toute VAHB complexe est isomorphe à une VAHB de la forme $\mathcal{A}_z^{\mathrm{an}}$ et que les deux VAHB analytiques $\mathcal{A}_z^{\mathrm{an}}$ et $\mathcal{A}_{z'}^{\mathrm{an}}$ sont isomorphes comme VAHB munies de leurs $\mu_{\mathfrak{n}}$-structures de niveau et $\mathfrak{c}$-polarisations si et seulement si $z' \in \Gamma^1 z$.

Soit A/S comme dans l'énoncé. Par ce qui précède, il existe une unique flèche ensembliste $\varphi : S \to M^{1,\mathrm{an}}$ telle que $A \cong \mathcal{A}^{\mathrm{an}} \times_{M^{1,\mathrm{an}}} S$. L'analyticité de φ se vérifie localement, car $\varphi(s) = \int_{\gamma_1} \omega(s) / \int_{\gamma_2} \omega(s)$, où (γ_1, γ_2) est une $\mathfrak{o}$-base locale convenable de l'homologie de A/S et ω est une $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$-base locale de $\underline{\omega}$. $\square$

Remarque 2.8. 1) Notons qu'en général pour $G \neq G^*$ la variété $M^{\mathrm{an}} = \Gamma \setminus \mathfrak{H}_F$ n'est qu'un espace de modules grossier pour le problème de modules de classes d'isomorphismes de VAHB munies d'une classe de $\mathfrak{c}$-polarisation (voir la définition 2.3) et d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau.

Comme Γ^1 est un sous-groupe distingué de Γ, le quotient $\mathfrak{o}_{D+}^\times$ agit sur $M^{1,\mathrm{an}}$. Sur les S-points $\epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times$ envoie $(A, \iota, \lambda, \alpha)/S$ sur $(A, \iota, \epsilon\lambda, \alpha)/S$. On a $M^{\mathrm{an}} = \mathfrak{o}_{D+}^\times \setminus M^{1,\mathrm{an}}$.

En fait, le sous-groupe $\mathfrak{o}_{D+}^\times \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^{\times 2}$ agit trivialement, car la multiplication par $\epsilon \in \mathfrak{o}^\times$ induit un isomorphisme $(A, \iota, \lambda, \alpha) \cong (A, \iota, \epsilon^2\lambda, \epsilon\alpha)$. Donc $M^{1,\mathrm{an}}$ est un revêtement fini étale de M^{an}, de groupe $\mathfrak{o}_{D+}^\times / \mathfrak{o}_{D+}^\times \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^{\times 2}$.

Pour toute VAHB A/S munie d'une classe de $\mathfrak{c}$-polarisation et d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau on a des flèches $S \to M^{1,\mathrm{an}}$ dont les composées avec la projection $M^{1,\mathrm{an}} \to M^{\mathrm{an}}$ coïncident et telles que A/S avec sa classe de $\mathfrak{c}$-polarisation soit le pull back de $A^{\mathrm{an}}/M^{1,\mathrm{an}}$ munie de la classe de sa $\mathfrak{c}$-polarisation universelle.

2) Lorsque $G = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathrm{GL}_2$, Hida, dans son livre [15] Chap.4 Sect. 4.1.2, a donné une autre description de M^{an} comme espace de modules grossier des VAHB avec classes de $F_+^\times$-polarisation. Dans sa description,

$$M^{\mathrm{an}} = M_1^{\mathrm{an}}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = F_+^\times \setminus \coprod_{\mathfrak{c}'} M_1^1(\mathfrak{c}', \mathfrak{n})^{\mathrm{an}},$$

où $\mathfrak{c}'$ décrit les idéaux de F qui appartiennent à la même classe stricte que $\mathfrak{c}$.

VAHB analytique de Tate. Soit $\mathcal{C} = \gamma\infty$ une Γ-pointe ($\gamma \in G_{\mathbb{Q}}^*$). On commence par étudier la forme d'un voisinage de $\mathcal{C}$ dans M^{an}, puis on va décrire celle de $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$, au-dessus d'un tel voisinage dans $M^{1,\mathrm{an}}$.

1 *cas* : $\mathcal{C} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \infty$. $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty) = \left\{ \begin{pmatrix} u\epsilon & b \\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^\times,\ \epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times,\ b \in \mathfrak{c}^* \right\} = \mathfrak{c}^* \rtimes (\mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^\times \times \mathfrak{o}_{D+}^\times)$, où $\mathfrak{o}_{D+}^\times = \mathfrak{o}_+^\times \cap D_{\mathbb{Q}}$ et pour tout idéal $\mathfrak{f}$ de F, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}^\times$ désigne le groupe des unités de $\mathfrak{o}$ congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$.

Soit ϕ l'inclusion naturelle $F \to F \otimes \mathbb{C}$; on a une suite exacte courte :

$$0 \to \mathfrak{c}^* \xrightarrow{\phi} F \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{q} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* \to 1, \tag{2}$$

obtenue par produit tensoriel par $\mathfrak{c}^*$ de $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2i\pi\cdot}} \mathbb{C}^* \to 1$.

Pour $m \in F$ et $z \in F \otimes \mathbb{C}$, on pose $q_z^m = q(\phi(m)z)$ $(= q(\phi(m)z + \phi(n))$ pour tout $n \in \mathfrak{c}^*)$. On voit facilement :

Fait. Pour $H > 0$ assez grand $\mathrm{Stab}_\Gamma(W_H) = B_\Gamma := \Gamma \cap B_{\mathbb{Q}}$.

Le groupe $\mathfrak{o}_\infty^\times := \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^\times \times \mathfrak{o}_{D+}^\times$ agit sur le quotient $D_H = \mathfrak{c}^* \backslash W_H$ par $(u, \epsilon) \cdot (z + \mathfrak{c}^*) = u^2\epsilon z + \mathfrak{c}^*$, et on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}_F \arrow[d] & W_H \arrow[l, hook'] \arrow[d] & & & \\
M^{\mathrm{an}} & B_\Gamma \backslash W_H \arrow[l, hook'] & D_H = \mathfrak{c}^* \backslash W_H \arrow[l, "\bmod\ \mathfrak{o}_\infty^\times"'] \arrow[r, hook] & F \otimes \mathbb{C} / \phi(\mathfrak{c}^*) \arrow[r, "q", "\sim"'] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* =: S_\infty
\end{tikzcd}$$

Le diagramme suivant décrit la structure de la VAHB universelle $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$ sur le voisinage $B_{\Gamma^1} \backslash W_H$ de la pointe ∞ dans $M^{1,\mathrm{an}}$:

$$\begin{tikzcd}
B_{\Gamma^1} \backslash (W_H \times F \otimes \mathbb{C})/\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^* \arrow[d] & \mathfrak{c}^* \backslash (W_H \times F \otimes \mathbb{C})/\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^* \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^*)/q_z^{\mathfrak{o}} \arrow[d] \\
B_{\Gamma^1} \backslash W_H & D_H \arrow[l, "\bmod\ \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^\times"'] \arrow[r, hook] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* =: S_\infty.
\end{tikzcd}$$

Commentaires. 1) La notation $q_z^{\mathfrak{o}}$ exprime que $m \in \mathfrak{o}$ agit sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^*$ par la formule $(q_z, q_v) \cdot m = (q_z, q_v q_z^m)$.

2) Le groupe $\mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^\times$ agit sur $S_\infty \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^*$ par $u \cdot (q_z, q_v) = (q_z^{u^2}, q_v^u)$.

Définition 2.9. La VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée au-dessus de S_∞ ainsi obtenue s'appelle la VAHB analytique de Tate, notée $\mathrm{Tate}_{\mathfrak{c},\mathfrak{o}}(q_z)$. Sa fibre au point $q_z \in S_\infty$ est égale à $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^*/q_z^{\mathfrak{o}}$.

2 *cas* : $\mathcal{C} = \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} = \gamma\infty$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{Q}}^*$. $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathcal{C}) = B_{\Gamma,\mathcal{C}} := \Gamma \cap \gamma B_{\mathbb{Q}} \gamma^{-1}$. Un système fondamental de voisinages de la pointe $\mathcal{C}$ est donné par les $B_{\Gamma,\mathcal{C}} \backslash \gamma W_H$. Notons que pour tout sous-groupe Γ' de $G_{\mathbb{Q}}$ on a la suite exacte suivante :

$$1 \to \Gamma' \cap U_{\mathbb{Q}} \to \Gamma' \cap B_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{pr}(\Gamma' \cap B_{\mathbb{Q}}) \to 1,$$

où pr : $B_{\mathbb{Q}} \to T_{\mathbb{Q}}$ est la projection canonique. Le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}_F \arrow[r] & M^{\mathrm{an}} = \Gamma \backslash \mathfrak{H}_F \arrow[r, "\sim"] & \gamma^{-1}\Gamma\gamma \backslash \mathfrak{H}_F & \\
\gamma W_H \arrow[r] \arrow[u, hook] & B_{\Gamma,\mathcal{C}} \backslash \gamma W_H \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, hook] & \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}} \backslash W_H \arrow[u, hook] & \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{Q}} \backslash W_H, \arrow[l, "\mathrm{pr}(\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}})"']
\end{tikzcd}$$

permet de nous ramener au cas de la pointe ∞, pour le groupe $\gamma^{-1}\Gamma\gamma$.

• Calcul de $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{Q}}$. $\begin{pmatrix} 1 & \xi^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma \iff \begin{pmatrix} 1+ac\xi^* & a^2\xi^* \\ -c^2\xi^* & 1-ac\xi^* \end{pmatrix} \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
\iff \xi^* \in a^{-2}\mathfrak{c}^* \cap (ac)^{-1}\mathfrak{n} \cap c^{-2}\mathfrak{c}^{*-1}\mathfrak{n} &= (a^2\mathfrak{c}^{*-1} + ac\mathfrak{n}^{-1} + c^2(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*)^{-1} \\
&= \mathfrak{c}^*(a^2\mathfrak{o} + ac(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^* + c^2\mathfrak{c}^{*2}\mathfrak{n}^{-1})^{-1} = \mathfrak{c}^*(a\mathfrak{o} + c\mathfrak{c}^*)^{-1}(a\mathfrak{o} + c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*)^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{Q}} = (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*$, avec $\mathfrak{b} = a\mathfrak{o} + c\mathfrak{c}^*$ *et* $\mathfrak{b}' = a\mathfrak{o} + c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*$.

Posons $X := \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ (sa classe est bien définie, d'après le lemme 1.7).

• Calcul de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times := \mathrm{pr}(\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}})$. Posons $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times := \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times \cap T_{1,\mathbb{Q}}$. Alors l'on a une suite exacte courte $1 \to \mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times \to \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times \xrightarrow{\nu} \nu(\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times) \to 1$. En prenant $\gamma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix}$ on a

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \{(u,\epsilon) \in F^\times \times \mathfrak{o}_{D+}^\times | \exists \xi^* \in a^{-2}\mathfrak{c}^*, u^{-1}-1+ac\xi^* \in \mathfrak{n}, u\epsilon - u^{-1} - ac\xi^* \in \frac{a}{c}\mathfrak{c}^{*-1}\mathfrak{n}\}.$$

Le groupe $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ ne dépend que de la classe de γ dans $\Gamma \backslash G_{\mathbb{Q}}/B_{\mathbb{Q}}$. Un calcul démontre que l'on a $\mathfrak{o}^\times \supset \mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times \supset \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^\times$. Si l'idéal $\mathfrak{n}$ est sans facteurs carrés, alors $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^\times$. Le calcul explicite du groupe $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ dans le cas général, est un corollaire d'une autre description des Γ-pointes, donnée dans [7] Prop 3.3.

Remarque 2.10. En général l'inclusion $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap T_{1,\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times$ est stricte, bien que ce soit une égalité pour la pointe ∞. Néanmoins le groupe $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap T_{1,\mathbb{Q}}$ est d'indice fini dans $\mathfrak{o}^\times$.

Le type de la pointe $\mathcal{C}$ est déterminé par : $\begin{cases} \text{l'ideal } X^*, \\ \text{le groupe } \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times, \\ \text{l'action de } \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times \text{ sur } X^* \backslash W_H. \end{cases}$

Le fait de remplacer γ par $\gamma \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & a'^{-1} \end{pmatrix}$, multiplie X^* par a'^{-2} et conjugue l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ sur $X^* \backslash W_H$, par l'isomorphisme $W_H \to W_{\mathrm{N}(a')^2H}$, $z \mapsto a'^2z + a'c'$.

Pour étudier la VAHB universelle $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}/M^{1,\mathrm{an}}$ au voisinage de la pointe $\mathcal{C}$, trouvons quel réseau est stable par $\gamma^{-1}\,\mathrm{SL}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)\gamma$. Par le théorème de Bezout on peut prendre $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F) \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{b} & (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^* \\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} & \mathfrak{b}^{-1} \end{pmatrix}$, où $\mathfrak{b} = a\mathfrak{o} + c\mathfrak{c}^*$. Posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Comme γ^{-1}

transforme le réseau $L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$ en le réseau $L = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*$

$$\gamma^{-1}\,\mathrm{SL}(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\gamma = \mathrm{SL}(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*) = \mathrm{SL}_2(F)\cap\begin{pmatrix}\mathfrak{o} & \mathfrak{b}^{-2}\mathfrak{c}^*\\ \mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^{*-1} & \mathfrak{o}\end{pmatrix}. \text{ Donc}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{\mathrm{an}} \arrow[d] & B_{\Gamma^1,\mathcal{C}}\backslash(\gamma W_H\times F\otimes\mathbb{C})/\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^* \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap B_{\mathbb{Q}}\backslash(W_H\times F\otimes\mathbb{C})/\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^* \arrow[d] \\
M^{1,\mathrm{an}} & B_{\Gamma^1,\mathcal{C}}\backslash\gamma W_H \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sim"] & \gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap B_{\mathbb{Q}}\backslash W_H
\end{tikzcd}$$

car $\gamma : \mathcal{A}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{an}}$ $(z,v)\mapsto(\gamma z, j(\gamma,z)^{-1}v)$ et γ^{-1} envoie $\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*$ sur $\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*$.

A partir de là, en posant $A^{\mathrm{an}}_{\gamma,H} = \gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap B_{\mathbb{Q}}\backslash(W_H\times(F\otimes\mathbb{C}))/\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*$, on a la description de la variété universelle au voisinage de la pointe $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
A^{\mathrm{an}}_{\gamma,H} \arrow[d] & X^*\backslash(W_H\times(F\otimes\mathbb{C}))/\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^* \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes X^*\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*)/q_z^{\mathfrak{b}} \arrow[d] \\
\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap B_{\mathbb{Q}}\backslash W_H & X^*\backslash W_H \arrow[l, "\mathrm{mod}\ \ \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}"'] \arrow[r, hook] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes X^* =: S_{\mathcal{C}},
\end{tikzcd}$$

Le groupe $\mathfrak{b}$ agit sur le tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes X^*\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*$ par $(q_z,q_v)\cdot\beta = (q_z, q_v q_z^{\beta})$. Le groupe $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ agit sur $S_{\mathcal{C}}\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*$ par $u\cdot(q_z,q_v) = (q_z^{u^2}q^u_{\xi_u^*}, q_v^u)$, où ξ_u^* est un élément de $(\mathfrak{b}^2\mathfrak{c})^*$, bien défini modulo X^*, et tel que $\begin{pmatrix}u & \xi_u^*\\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}\in\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma$.

On rappelle que, par définition, pour tout $m\in F$, $z\in F\otimes\mathbb{C}$ on pose

$$q_z^m = q(\phi(m)z) = q(\phi(m)z+\phi(n))$$

pour tout $n\in X^*$, où

$$0\to X^*\xrightarrow{\phi}F\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{q}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{c}^*\to 1.$$

Définition 2.11. La VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée au-dessus de $S_{\mathcal{C}}$ ainsi obtenue, s'appelle la VAHB analytique de Tate, notée $\mathrm{Tate}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q_z)$. Sa fibre au point $q_z\in S_{\mathcal{C}}$ est égale à $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*/q_z^{\mathfrak{b}}$.

Formes modulaires de Hilbert de niveau $\boldsymbol{\Gamma = \Gamma_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})}$. Rappelons que $\mathbb{Z}[J_F]$ s'identifie au groupe des caractères du tore $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ par $\kappa = \sum_{\tau\in J_F}k_\tau\tau\mapsto(x\mapsto\prod\tau(x)^{k_\tau})$. On note ce caractère $x\mapsto x^\kappa$ et on utilisera la notation additive pour la loi de groupe sur les caractères. Les éléments de $\mathbb{Z}[J_F]$ sont appelés des *poids*.

On suppose désormais $F\neq\mathbb{Q}$. Pour tout poids $\kappa = \sum_{\tau\in J_F}k_\tau\tau$, on peut définir l'espace des formes automorphes de Hilbert holomorphes de poids κ et niveau Γ comme l'espace des fonctions holomorphes $f:\mathfrak{H}_F\to\mathbb{C}$ telles que pour tout $\gamma\in\Gamma$

$$f(\gamma(z)) = \nu(\gamma)^{-\kappa/2}j(\gamma,z)^\kappa f(z).$$

Ce sont les sections du fibré inversible analytique $\underline{\omega}^\kappa$ sur M^{an} donné par le cocycle

$$\Gamma\to\mathcal{O}^\times_{\mathfrak{H}_F},\quad \gamma\mapsto\nu(\gamma)^{-\kappa/2}j(\gamma,z)^\kappa.$$

Cependant, on ne s'intéresse dans la suite de ce texte qu'aux formes qui peuvent intervenir dans la cohomologie de la variété de Hilbert à coefficients dans un système local algébrique (c'est-à-dire donné par une représentation algébrique de G). Ces représentations sont de la forme

$$\bigotimes_{\tau \in J_F} \mathrm{Sym}^{n_\tau} \otimes \mathrm{Det}^{m_\tau} .$$

Une telle représentation ne définit un système local sur M^{an} que si le centre de Γ agit trivialement. Cette condition équivaut à la condition d'algébricité de Clozel ([4] Sect.1.2.3) :

Définition 2.12. Un poids $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$ est dit algébrique si ses coordonnées k_τ sont supérieures ou égales à 2 et sont de même parité. On pose alors $k_0 = \max\{k_\tau | \tau \in J_F\}$, $m_\tau = \frac{k_0 - k_\tau}{2} \in \mathbb{N}$, $t = \sum_{\tau \in J_F} \tau$ et $n_\tau = k_\tau - 2 \geq 0$ ($n = \kappa - 2t$ et $\kappa + 2m = k_0 t$).

Pour toute fonction $f : \mathfrak{H}_F \to \mathbb{C}$ et pour tout $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}^+$, on pose :

$$f|_\kappa \gamma(z) = \nu(\gamma)^{\kappa+m-t} j(\gamma, z)^{-\kappa} f(\gamma z).$$

Considérons l'espace :

$$G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})^{\mathrm{an}} = \left\{ f : \mathfrak{H}_F \to \mathbb{C} \;\middle|\; \forall \gamma \in \Gamma, f|_\kappa \gamma = f \text{ et } f \text{ holomorphe sur } \mathfrak{H}_F^* \right\}.$$

On appelle cet espace l'espace des formes modulaires holomorphes de poids κ et groupe de niveau Γ. Il est isomorphe à l'espace des sections globales du fibré analytique $\underline{\omega}^\kappa \otimes \underline{\nu}^{-n_0 t/2}$ sur M^{an} associé au cocyle $\gamma \mapsto \nu(\gamma)^{-n_0 t/2} j(\gamma, z)^\kappa$ avec $n_0 = k_0 - 2$.

Remarque 2.13. La torsion par $\underline{\nu}^{-n_0 t/2}$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes

$$\mathrm{H}^0(M^{\mathrm{an}}, \underline{\omega}^\kappa) \cong \mathrm{H}^0(M^{\mathrm{an}}, \underline{\omega}^\kappa \otimes \underline{\nu}^{-n_0 t/2}).$$

Pour chaque $f \in G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})^{\mathrm{an}}$, on se propose d'expliciter la notion d'holomorphie en une pointe $\mathcal{C} = \gamma\infty \in \mathbb{P}^1(F)$. La fonction $f_{\mathcal{C}} := f|_\kappa \gamma$ est invariante par le groupe $\gamma^{-1}\Gamma\gamma$ et donc par son sous-groupe de translations $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{Q}} \cong X^*$ (pour le calcul de ce-dernier voir le paragraphe précédent). Par conséquent, elle admet un développement en série de Fourier :

$$f_{\mathcal{C}}(z) = \sum_{\xi \in X} a_\xi e^{2i\pi \, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi z)}. \tag{3}$$

La condition d'holomorphie en la pointe $\mathcal{C}$ se lit alors :

$$a_\xi \neq 0 \Rightarrow \xi \in X_+ \text{ ou } \xi = 0. \tag{4}$$

Pour tout $(u, \epsilon) \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$, il existe $\xi_{u,\epsilon}^* \in (\mathfrak{b}^2\mathfrak{c})^*$, défini à X^* près, tel que $\begin{pmatrix} u\epsilon & \xi_{u,\epsilon}^* \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma$. L'invariance de $f_{\mathcal{C}}$ par le groupe $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}}$ nous donne pour tout $\xi \in X$ la relation :

$$a_{u^2\epsilon\xi} = \epsilon^{\kappa+m-t} u^\kappa e^{2i\pi \, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u \xi_{u,\epsilon}^*)} a_\xi. \tag{5}$$

Principe du q-développement. Si pour tout ξ on a $a_\xi = 0$, alors $f = 0$.

Principe de Koecher. Si $F \neq \mathbb{Q}$, alors la condition (4) est toujours satisfaite. Si κ n'est pas parallèle, alors $a_0 = 0$ (pas de séries d'Eisenstein).

D'après le (5), pour tout $u \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap T_{1,\mathbb{Q}}$ et $\xi \in X$, on a $a_{u^2\xi} = u^\kappa a_\xi$, en particulier $a_0 = u^\kappa a_0$, d'où la deuxième propriété.

Vérifions (4) par l'absurde : soient $\xi \in X$ et $\xi^* \in X_+^*$ tels que $a_\xi \neq 0$ et $\langle \xi, \xi^* \rangle < 0$. Alors, on peut choisir $u \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap T_{1,\mathbb{Q}}$ de façon que la quantité $\langle u^2\xi, \xi^* \rangle$ soit arbitrairement proche de $-\infty$, ce qui contredit l'holomorphie de f au point $\underline{i}\xi^* \in \mathfrak{H}_F$. □

3 Compactifications toroïdales analytiques

Références : [1], [23].

On a vu qu'en ajoutant à M^{an} un nombre fini de points (les Γ-pointes) on obtient un espace analytique $M^{\mathrm{an}\,*}$, compact pour la topologie de Satake. Il est aussi appelé compactification minimale et n'est pas lisse si $d_F > 1$, comme le montre un argument de topologie (voir [12]).

Un voisinage typique de la pointe ∞ est de la forme $\mathfrak{o}_\infty^\times \backslash q(D_H) \subset \mathfrak{o}_\infty^\times \backslash \mathbb{C}^{\times d}$. On aurait pu tenter de compactifier cette pointe en considérant l'adhérence de $\mathfrak{o}_\infty^\times \backslash q(D_H)$ dans $\mathfrak{o}_\infty^\times \backslash \mathbb{C}^d$. Le problème est que si $d_F > 1$ le quotient de $\mathbb{C}^d$ par un groupe abélien, ayant des points fixes isolés, n'est jamais lisse (voir [12] p. 30).

Il est important de disposer de compactifications lisses de M^{an} avec diviseurs à croisements normaux à l'infini (*i.e.* au-dessus des pointes). Par exemple, pour pouvoir donner une décomposition de Hodge de la cohomologie singulière de M^{an}, on doit introduire des faisceaux cohérents à singularités logarithmiques à l'infini. Pour obtenir une compactification lisse de M^{an}, on utilise la théorie des immersions toroïdales, s'inspirant du fait qu'au voisinage d'une pointe, M^{an} ressemble au quotient d'un tore par l'action d'un groupe.

Immersions toriques. Dans ce paragraphe on adopte les notations suivantes :

k corps algébriquement clos.

$S \cong \mathbb{G}_m^d$ tore algébrique sur k.

$X = \mathrm{Hom}(S, \mathbb{G}_\mathrm{m}) \cong \mathbb{Z}^d$ groupe des caractères de S. Pour $\xi \in X$ on notera q^ξ le caractère correspondant.

$X^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_\mathrm{m}, S) \cong \mathbb{Z}^d$ groupe des cocaractères de S. Pour $\xi^* \in X^*$ on notera λ_{ξ^*} le cocaractère correspondant.

On a un accouplement parfait $\langle\ ,\ \rangle : X \times X^* \to \mathbb{Z}$.

Pour tout anneau commutatif R et tout monoïde Q, on notera $R[q^\xi; \xi \in Q]$ la R-algèbre du monoïde.

On a $S = \mathrm{Spec}\left(k[q^\xi; \xi \in X]\right)$ et $S = \mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes X^*$.

Remarque 3.1. Si $k = \mathbb{C}$ on peut identifier $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ par l'application $e^{2i\pi\cdot}$ et on a :

(i) $X^* \cong \pi_1^{\mathrm{top}}(S)$.

(ii) $X_\mathbb{C}^* = X^* \otimes \mathbb{C}$ revêtement universel de S.

(iii) $S \cong X_\mathbb{C}^*/X^* = S_c \times i X_\mathbb{R}^*$, où $S_c \cong X_\mathbb{R}^*/X^*$ est le sous-groupe compact maximal de S. On appelle ord : $S \to X_\mathbb{R}^*$ l'application déduite de la projection sur $iX_\mathbb{R}^*$.

Définition 3.2. Une immersion torique normale (affine) de S, est une immersion ouverte de S dans une variété (=schéma intègre de type fini, séparé sur k) normale (affine) munie d'une action de S qui étend l'action de S sur lui-même.

Dans la suite, on ne considérera que des cônes polyédraux rationnels convexes de $X^*_{\mathbb{R}}$, ouverts dans l'espace vectoriel qu'ils engendrent et stricts (i.e. qui ne contiennent pas de droite) ; on abrégera ces propriétés en parlant de cônes p.r.c.o.s. Un tel cône σ est dit *lisse,* si $\overline{\sigma} \cap X^*$ est engendré par une partie d'une base de X^*.

Théorème 3.3 ([23] Chap.I, Théorème 1'). *La correspondance :*

$$\sigma \mapsto S_\sigma := \mathrm{Spec}\ k[q^\xi; \xi \in X \cap \check{\sigma}]$$

donne une bijection entre l'ensemble des cônes p.r.c.o.s. de $X^*_{\mathbb{R}}$ et l'ensemble des immersions toriques normales affines de S. De plus S_σ est lisse, si et seulement si, le cône σ est lisse.

Exemple 3.4. Voici trois exemples d'immersions torique pour $S = {\mathbb{G}_\mathrm{m}}^2$:

- $\overline{\sigma_1} = (1,0)\,\mathbb{R}_+ + (0,1)\,\mathbb{R}_+$, donne ${\mathbb{G}_\mathrm{m}}^2 \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[Z_1, Z_2]) \cong \mathbb{A}^2$.
- $\overline{\sigma_2} = (1,0)\,\mathbb{R}_+$, donne ${\mathbb{G}_\mathrm{m}}^2 \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[Z_1, Z_2, Z_2^{-1}]) \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_\mathrm{m}$.
- $\overline{\sigma_3} = (1,1)\,\mathbb{R}_+ + (1,-1)\,\mathbb{R}_+$, donne

$${\mathbb{G}_\mathrm{m}}^2 \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[Z_1Z_2, Z_1, Z_1Z_2^{-1}]) \cong \mathrm{Spec}(k[Z_1, Z_2, Z_3]/(Z_1Z_3 - Z_2^2)).$$

Proposition 3.5 ([23] Chap.I, Théorème 3). *Soient S_{σ_1} et S_{σ_2} deux immersions toriques normales affines de S. Alors, il existe un morphisme S-équivariant $S_{\sigma_1} \to S_{\sigma_2}$, si et seulement si $\sigma_1 \subset \overline{\sigma_2}$.*

On veut maintenant décrire le bord de S_σ : il est stratifié en orbites sous S de points à l'infini obtenus comme des limites "$\lim_{t\to 0} \lambda_{\xi^*}(t)$", pour $\xi^* \in X^* \cap \overline{\sigma}$. De manière rigoureuse, pour tout $\xi^* \in \overline{\sigma} \cap X^*$, on définit le point $\lambda_{\xi^*}(0) \in S_\sigma$, par :

$$\forall \xi \in X \cap \check{\sigma}, \quad q^\xi(\lambda_{\xi^*}(0)) = \begin{cases} 1, \text{ si } \langle \xi, \xi^* \rangle = 0 \\ 0, \text{ si } \langle \xi, \xi^* \rangle > 0. \end{cases}$$

Théorème 3.6 ([23] Chap.I, Théorème 2).

(a) *Soient $\xi_1^*, \xi_2^* \in \overline{\sigma} \cap X^*$. Alors $\lambda_{\xi_1^*}(0) = \lambda_{\xi_2^*}(0)$, si et seulement si ξ_1^* et ξ_2^* appartiennent à l'intérieur d'une même face de σ.*

(b) *Chaque S-orbite de S_σ contient un unique point du type $\lambda_{\xi^*}(0)$, $\xi^* \in \overline{\sigma} \cap X^*$.*

(c) *On a une bijection entre les faces de σ et les S-orbites de S_σ, $\tau \mapsto o(\tau)$.*

(d) *$\tau_1 \subset \overline{\tau_2}$ si et seulement si $o(\tau_2) \subset \overline{o(\tau_1)}$.*

(e) $\dim(\tau) + \dim(o(\tau)) = d$.

Soit une face τ de σ. On a $o(\tau) = \mathrm{Spec}\left(k[q^\xi; \xi \in X \cap \tau^\perp]\right)$ et $\overline{o(\tau)} = \coprod_{\tau \subset \overline{\tau'}} o(\tau')$. La strate $o(\tau)$ est fermée dans S_τ (donnée par l'idéal engendré par les q^ξ tels que $\langle \xi, \xi^* \rangle > 0$ pour tout ξ^* à l'intérieur de τ) et S_τ est ouverte dans S_σ. De plus les strates de S_σ contenues dans S_τ sont les strates de S_τ.

Définition 3.7. Un *éventail* dans $X^*_{\mathbb{R}}$ (= décomposition rationnelle partielle en cônes polyédraux fortement convexes), est la donnée d'un ensemble Σ de cônes p.r.c.o.s. de $X^*_{\mathbb{R}}$ deux à deux disjoints, tel que pour tout $\sigma \in \Sigma$ et pour toute face τ de σ, $\tau \in \Sigma$. L'éventail est dit lisse si tout les cônes qu'il contient sont lisses.

Tout éventail peut être raffiné en un éventail lisse, par subdivision des cônes. D'après la proposition 3.5, étant donné un éventail Σ, on peut recoller les S_{σ_i}, $i = 1, 2$, le long des S_τ, τ désignant l'intérieur de $\overline{\sigma}_1 \cap \overline{\sigma}_2$, et ainsi obtenir un schéma séparé, normal, intègre, *localement* de type fini sur k, noté S_Σ ou $S_{\{\sigma\}}$. Si Σ est fini, S_Σ est une variété.

Théorème 3.8 ([23] Chap.I, Théorème 6).

(a) *L'application $\Sigma \mapsto S_\Sigma$ donne une bijection entre les éventails de $X^*_{\mathbb{R}}$ et les immersions toriques normales de S.*

(b) *L'application $\sigma \mapsto S_\sigma$ donne une bijection entre les faces σ et les ouverts affines S-invariants de S_Σ.*

(c) *L'application $\sigma \mapsto O^\sigma$:= l'unique orbite fermée de S_σ, est une bijection entre les faces σ et les S-orbites de S_Σ. De plus $\tau \subset \overline{\sigma}$, si et seulement si, $O^\sigma \subset \overline{O^\tau}$.*

Proposition 3.9 ([23] Chap.I, Théorèmes 7 et 8). *Soient S_Σ et $S_{\Sigma'}$ deux immersions toriques normales de S. Alors, il existe un morphisme S-équivariant $S_\Sigma \to S_{\Sigma'}$, si et seulement si, $\Sigma \subset \Sigma'$. De plus la flèche $S_\Sigma \to S_{\Sigma'}$ est propre, si et seulement si, $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma'} \sigma$.*

Remarque 3.10. Si k est un anneau (en particulier si $k = \mathbb{Z}$) la construction qui à Σ associe S_Σ reste inchangée. En revanche, on n'obtient pas toutes les immersions toriques de cette manière-là.

Carte locale pour une pointe de M^{an}. Soit une Γ-pointe $\mathcal{C} = \gamma\infty$. On a vu dans la partie 2 qu'un système de voisinages de $\mathcal{C}$ dans M^{an} est donné, pour $H > 0$, par les $B_{\Gamma,\mathcal{C}} \setminus \gamma W_H \cong \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}} \setminus D_{\gamma,H}$, où $D_{\gamma,H} = \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{R}} \setminus W_H = X^* \setminus W_H$ et où l'action de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$ sur $D_{\gamma,H}$ est donnée par $(u,\epsilon)\cdot z = \phi(u^2\epsilon)z + \phi(u\xi^*_{u,\epsilon})$ (voir le paragraphe qui précède la définition 2.11).

Notons qu'avec les notations de la remarque 3.1, $X^*_{\mathbb{R}} = F \otimes \mathbb{R}$, $S_{\mathcal{C}} \underset{q}{\overset{\sim}{\leftarrow}} \phi(X^*) \setminus F \otimes \mathbb{C}$, $S_{\mathcal{C},c} \underset{q}{\overset{\sim}{\leftarrow}} F \otimes \mathbb{R}/\phi(X^*)$ et $\mathrm{ord} : \phi(X^*) \setminus F \otimes \mathbb{C} \to F \otimes \mathbb{R}$ est l'application "partie imaginaire". On a aussi $X^* \setminus \mathfrak{H}_F = \mathrm{ord}^{-1}((F\otimes\mathbb{R})_+)$ et $X^* \setminus W_H = \mathrm{ord}^{-1}\{y \in (F\otimes\mathbb{R})_+ \mid \prod_\tau y_\tau > H\}$.

L'exponentielle donne une injection $q : D_{\gamma,H} \hookrightarrow S_{\mathcal{C}}$ et l'action de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$ s'étend en une action sur le tore complexe $S_{\mathcal{C}} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes X^*$ par $(u,\epsilon)\cdot q_z = q_z^{u^2\epsilon} q^u_{\xi^*_{u,\epsilon}}$.

L'action de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$ sur $S_{\mathcal{C}}$ tout entier, n'est pas libre (l'élément unité de $S_{\mathcal{C}}$ est fixe par cette action). Un autre problème est posé par le centre de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$:

$$\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},Z} = \{(u,\epsilon) \in \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}} \mid \epsilon = u^{-2}\}.$$

Lemme 3.11. (i) *Le groupe* $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},Z}^{\times}$ *agit trivialement sur* $S_{\mathcal{C}}$.

(ii) *Sous l'hypothèse* **(NT)** $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C},Z}^{\times}$ *agit librement et discontinuement sur* $q(D_{\gamma,H})$.

Un calcul direct montre que si $\epsilon = u^{-2}$, alors $\xi_{u,\epsilon}^{*} \in X^{*}$, d'où le (i). Le (ii) découle du fait que sous l'hypothèse **(NT)** on a $-1 \notin \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$. □

On veut ajouter à $S_{\mathcal{C}}$ une frontière analytique $\mathcal{E}$ de façon que l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C},Z}^{\times}$ sur $S_{\mathcal{C}}$ se prolonge en une action libre et discontinue sur $\mathcal{E}$. Alors le quotient par $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$ de l'adhérence $\overline{q(D_{\gamma,H})}$ de $q(D_{\gamma,H})$ dans $S_{\mathcal{C}} \cup \mathcal{E}$ sera notre carte locale pour la compactification de la pointe $\mathcal{C}$.

Pour ce faire on considère un éventail $\Sigma^{\mathcal{C}}$ de $X_{\mathbb{R}+}^{*} = \{0\} \cup (F \otimes \mathbb{R})_{+}$ qui est complet (i.e. tel que $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma = X_{\mathbb{R}+}^{*}$), stable pour l'action de $\mathfrak{o}^{\times}$ et qui contient un nombre fini d'éléments modulo cette action. L'existence d'une telle décomposition découle du théorème des unités de Dirichlet ($\mathfrak{o}^{\times 2} \cong \mathbb{Z}^{d-1}$). En effet, il suffit de décomposer en cellules $\phi(X^{*}) \cap \{y \in X_{\mathbb{R}+}^{*} \mid \prod_{\tau} y_{\tau} = \min_{\xi^{*}\in X^{*}\setminus\{0\}} \mathrm{N}(\xi^{*})\} \xleftarrow[\exp]{\sim} \mathbb{Z}^{d-1}$ et prendre chaque cellule comme base d'un cône.

Soit $S_{\mathcal{C}} \hookrightarrow S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ l'immersion torique correspondante, avec action équivariante de $\mathfrak{o}^{\times}$. Soit $\mathcal{E} = S_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \setminus S_{\mathcal{C}}$.

Quitte à raffiner notre décomposition (en subdivisant un cône et subdivisant les autres cônes de manière $\mathfrak{o}^{\times}$- équivariante) on peut toujours supposer $S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ lisse.

Soit $\overline{q(D_{\gamma,H})}$ l'adhérence de $q(D_{\gamma,H})$ dans $S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$. On voit alors aisément que

Proposition 3.12. (i) *On a* $\overline{q(D_{\gamma,H})} = q(D_{\gamma,H}) \cup \mathcal{E}$.

(ii) *Le groupe* $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},Z}^{\times}$ *agit trivialement sur* $\overline{q(D_{\gamma,H})}$. *Le groupe* $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C},Z}^{\times}$ *agit librement et discontinument sur* $\overline{q(D_{\gamma,H})}$.

L'espace analytique $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} \setminus \overline{q(D_{\gamma,H})}$ est la carte de la pointe $\mathcal{C}$. Pour compactifier la pointe $\mathcal{C}$ on recolle M^{an} et $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} \setminus \overline{q(D_{\gamma,H})}$ le long de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} \setminus D_{\gamma,H}$.

Recollement et compactification analytique. Soit $\overline{M^{\mathrm{an}}} = M_{\Sigma}^{\mathrm{an}}$ la variété analytique complexe obtenue, par la construction du paragraphe précédent, en recollant à M^{an} les cartes locales pour toutes les Γ-pointes. Dans la suite nous écrirons juste $\overline{M^{\mathrm{an}}}$, bien que tout dépend des éventails $\Sigma^{\mathcal{C}}$.

Proposition 3.13. $\overline{M^{\mathrm{an}}}$ *est une variété analytique complexe normale propre, contenant* M^{an} *comme sous-variété ouverte dense. Elle est lisse si tous les éventails* $\Sigma_{\mathcal{C}}$ *sont lisses. On a un morphisme de variétés analytiques* $\pi : \overline{M^{\mathrm{an}}} \to M^{\mathrm{an}*}$ *qui est un isomorphisme au-dessus de* M^{an}.

Démonstration. Pour démontrer la propreté de $\overline{M^{\mathrm{an}}}$ nous utiliserons le critère de compacité séquentielle. Soit une suite de points $z_j \in \overline{M^{\mathrm{an}}}$. Comme M^{an} est ouvert dense dans $\overline{M^{\mathrm{an}}}$, il suffit de considérer le cas où $z_j \in M^{\mathrm{an}}$ (argument d'extraction diagonale). Puisque l'on sait déjà que $M^{\mathrm{an}*}$ est compact, on peut supposer que la suite $\pi(z_j)$ converge vers une pointe $\mathcal{C}$ de $M^{\mathrm{an}*}$. Dans ce cas, pour j assez grand, z_j appartient à $D_{\gamma,H}$. Comme $\Sigma^{\mathcal{C}}$

possède un nombre fini de cônes modulo l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$, on peut supposer qu'il existe un cône $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, tel que pour tout j, $q(z_j)$ appartient à $S_{\mathcal{C},\sigma}$.

Montrons alors qu'il existe une suite extraite de la suite $q(z_j)$ qui converge vers un point de $S_{\mathcal{C},\sigma}$. Considérons la suite $y_j = \mathrm{ord}(q(z_j)) \in \sigma$. On a $y_{j,\tau} > 0$ et $\lim_{j\to\infty} \prod_\tau y_{j,\tau} = \infty$. Si l'on décompose les y_j dans une base de σ, on trouve aisément qu'au moins une coordonné tend vers $+\infty$. D'après la description de la topologie de $S_{\mathcal{C},\sigma}$, donnée dans [1], il est clair que l'on peut extraire de $q(z_j)$ une sous-suite convergente dans $S_{\mathcal{C},\sigma}$. $\square$

4 Variétés et formes de Hilbert arithmétiques

L'espace de modules de Hilbert–Blumenthal. Soit $\mathfrak{c}$ un idéal de F, muni de sa positivité naturelle $\mathfrak{c}_+ = \mathfrak{c} \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$. Posons $\Delta = \mathrm{N}(\mathfrak{d}\mathfrak{n}) = \Delta_F\, \mathrm{N}(\mathfrak{n})$.

On a un foncteur contravariant $\underline{\mathcal{M}}^1$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}$) de la catégorie des $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schémas vers celle des ensembles, qui à un schéma S associe l'ensemble des quadruplets $(A, \iota, \lambda, \alpha)/S$ (resp. $(A, \iota, \overline{\lambda}, \alpha)/S$) modulo isomorphisme, où (A, ι) est une VAHB de dimension relative d, λ est une $\mathfrak{c}$-polarisation (resp. $\overline{\lambda}$ est un classe de $\mathfrak{c}$-polarisations ; voir Déf.2.3) sur A et $\alpha : (\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$ est une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau.

Théorème 4.1 ([29], [37]). *Le foncteur $\underline{\mathcal{M}}^1$ est représentable par un schéma quasi-projectif M^1 sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ muni d'un quadruplet universel $(\mathcal{A}, \iota, \lambda, \alpha)$. Le schéma M^1 est lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$. De plus $M^1(\mathbb{C}) \cong M^{1,\mathrm{an}}$ et donc M^1 est géométriquement connexe.*

Soit $f : \mathcal{A} \to M^1$ la projection canonique. On pose $\underline{\omega} = \underline{\omega}_{\mathcal{A}/M^1} = f_*\Omega^1_{\mathcal{A}/M^1}$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} = \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{A}/M^1) = R^1 f_*\Omega^\bullet_{\mathcal{A}/M^1}$. Au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ on a localement pour la topologie de Zariski $\underline{\omega} \cong \mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M^1}$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \cong L_0 \otimes \mathcal{O}_{M^1}$, où $L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$.

Corollaire 4.2. *Le foncteur $\underline{\mathcal{M}}$ admet un schéma de modules grossier M sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ quasi-projectif et lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$. Le schéma M est le quotient de M^1 par le groupe fini $\mathfrak{o}_{D+}^{\times}/(\mathfrak{o}_{D+}^{\times} \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^{\times 2})$ qui agit proprement et librement par*

$$[\epsilon] : (\mathcal{A}, \iota, \lambda, \alpha)/S \mapsto (\mathcal{A}, \iota, \epsilon\lambda, \alpha)/S.$$

Il est important de noter pour la suite que les automorphismes $[\epsilon]$ de M^1 définis dans le corollaire se prolongent en une action du groupe $\mathfrak{o}_{D+}^{\times}/(\mathfrak{o}_{D+}^{\times} \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^{\times 2})$ sur les fibrés $\underline{\omega}$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}$. L'action sur $\underline{\omega}$ est donnée par la formule $s \mapsto \epsilon^{-1/2}[\epsilon]^* s$, où s est une section de $\underline{\omega}$. L'action sur $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}$ vient de celle sur le complexe $Rf_*\Omega^\bullet_{\mathcal{A}/M^1}$. Ces actions sont définis sur l'anneau des entiers du corps de nombres $F'' = F(\sqrt{\epsilon}, \epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^{\times})$.

Par quotient, on peut définir des fibrés encore notés $\underline{\omega}$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}$ sur M. Au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ on a encore localement pour la topologie de Zariski $\underline{\omega} \cong \mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_M$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \cong L_0 \otimes \mathcal{O}_M$, où $L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$.

Pour chaque $\mu \in \mathfrak{c}_+$, on note $\mathcal{L}_\mu$ le faisceau inversible ample sur $\mathcal{A}$ obtenu comme image inverse du fibré de Poincaré sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^t$ par le morphisme $(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}, \lambda \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \mu))$.

Formes modulaires de Hilbert arithmétiques. Considérons le schéma en groupes $\mathcal{T}_1 = \mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ qui est un modèle entier du tore $F^\times = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. Ce n'est un tore que sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta_F}]$ comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 4.3. Soit $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, avec $D \equiv 3 \pmod 4$ sans facteurs carrés. Alors $\mathcal{T}_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y][\frac{1}{X^2-DY^2}])$ et pour $p > 2$ premier on a : $\mathcal{T}_1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{F}_p^\times$, si $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$; $\mathcal{T}_1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_{p^2}^\times$, si $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$; $\mathcal{T}_1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{F}_p^+$, si $\left(\frac{D}{p}\right) = 0$.

On suppose désormais $F \neq \mathbb{Q}$ et on se place au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$. Considérons le faisceau $\underline{\mathfrak{M}} = \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_M}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_M, \underline{\omega})$. C'est un $\mathcal{T}_1$-torseur Zariski sur M.

Comme $\mathcal{T}_1$ est affine sur M, le faisceau $\underline{\mathfrak{M}}$ est représentable par un schéma $f : \mathfrak{M} \to M$ (voir [26] III.4 Théorème 4.3). En particulier on a un isomorphisme $\mathcal{T}_1 \underset{M}{\times} \mathfrak{M} \cong \mathfrak{M} \underset{M}{\times} \mathfrak{M}$, $(t,x) \mapsto (tx, x)$.

Sur le schéma de modules fin M^1 le schéma correspondant $\mathfrak{M}^1$ représente le foncteur : $\underline{\mathfrak{M}}^1 : \mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]\text{-Sch} \to \mathrm{Ens}$, qui à un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-schéma S associe l'ensemble des quintuplets $(A,\iota,\lambda,\alpha,\omega)$ modulo isomorphisme, où (A,ι,λ,α) est une VAHB, comme plus haut, et où ω est un isomorphisme de $\mathfrak{o}$-fibrés inversibles $\omega : \mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_S \cong \underline{\omega}$. La flèche d'oubli fait de $\underline{\mathfrak{M}}^1$ un faisceau Zariski sur M^1.

Pour la définition de l'espace des formes modulaires de Hilbert, nous suivons de près le paragraphe 6.8 dans [30], rédigé par P. Deligne.

Soit $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F] = X(\mathcal{T}_1)$ un poids et soit F' un corps de nombres, contenant F'' ainsi que les valeurs du caractère $\kappa : F^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Si $D = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, on peut prendre, par exemple, $F' = \mathbb{Q}$ et $\kappa = kt$ (poids parallèle), ou bien $F' = F^{\mathrm{gal}}$ $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$ poids quelconque.

Soit $\mathcal{O}'$ l'anneau des entiers de F'. Le morphisme de groupes algébriques κ : $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Res}^{F'}_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, se prolonge en un morphisme $\mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Res}^{\mathcal{O}'}_{\mathbb{Z}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, qui équivaut (par la formule d'adjonction) à un morphisme de groupes algébriques sur $\mathcal{O}'$, $\mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}') \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}')$, noté encore κ.

Pour tout $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-schéma Y, on pose $Y' = Y \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}])$. On a ainsi un $\mathcal{T}_1'$-torseur $f' : \mathfrak{M}' \to M'$. Le tore déployé $\mathcal{T}_1'$ agit sur $f'_*\mathcal{O}_{\mathfrak{M}'}$; la composante $-\kappa$-isotypique $(f'_*\mathcal{O}_{\mathfrak{M}'})[-\kappa]$ est un faisceau inversible sur M', noté $\underline{\omega}^\kappa$.

Définition 4.4. 1) Soit R une $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre. On définit l'espace $G(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R)^{\mathrm{geom}}$ des formes modulaire de Hilbert de niveau Γ et à coefficients dans R, comme $\mathrm{H}^0(\mathfrak{M} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathfrak{M}})$.

2) Soit R une $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre. Une forme modulaire de Hilbert arithmétique de poids κ, de niveau Γ et à coefficients dans R, est une section globale de $\underline{\omega}^\kappa$ sur $M \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R)$. On note $G_\kappa(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R)^{\mathrm{geom}} := \mathrm{H}^0(M \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R), \underline{\omega}^\kappa)$ l'espace de ces formes modulaire de Hilbert.

Remarque 4.5. 1) Le faisceau $\underline{\omega}^t$ ($t = \sum\tau$) n'est autre que le faisceau $\wedge^d\underline{\omega} = \det(\underline{\omega})$ sur M, et $\underline{\omega}^{kt}$ - sa puissance k-ième. Les formes modulaires de Hilbert de poids parallèle $k \geq 1$, s'écrivent donc $G_{kt}(\mathfrak{c},\mathfrak{n})^{\mathrm{geom}} = \mathrm{H}^0(M, (\wedge^d\underline{\omega})^{\otimes k})$.

2) Le torseur $\mathfrak{M}$ n'est pas trivial, car sinon pour tout $k \geq 1$ $(\wedge^d \underline{\omega})^{\otimes k}$ serait le fibré trivial sur M, et à fortiori sur M^{an}. Or, par le principe de Koecher $\mathrm{H}^0(M^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{M^{\mathrm{an}}}) = \mathrm{H}^0(\overline{M^{\mathrm{an}}}, \mathcal{O}_{\overline{M^{\mathrm{an}}}}) = \mathbb{C}$, ce qui contredirait l'existence de formes modulaires de Hilbert cuspidales non-nulles en poids kt.

3) Si $F' \supset F^{\mathrm{gal}}$, on a $\mathcal{T}_1' := \mathcal{T}_1 \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]) \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m}}{}^{J_F} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}])$ et par le théorème de diagonalisabilité des tores [21], on a :

$$f'_*\mathcal{O}_{\mathfrak{M}'} = \bigoplus_{\kappa \in X(\mathcal{T}_1)} \underline{\omega}^\kappa, \quad \mathrm{H}^0(\mathfrak{M}', \mathcal{O}_{\mathfrak{M}'}) = \bigoplus_{\kappa \in X(\mathcal{T}_1)} \mathrm{H}^0(M', \underline{\omega}^\kappa).$$

Par ailleurs, l'action de $\mathfrak{o}$ permet de décomposer $\underline{\omega} = \mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/M')^\vee \cong \mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M'}$ en somme directe de fibrés inversibles $\underline{\omega}^\tau$ sur M', indexés par les différents plongements τ de $\mathfrak{o}$ dans $\mathcal{O}'$. On a $\underline{\omega}^\kappa = \otimes_\tau (\underline{\omega}^\tau)^{\otimes k_\tau}$.

4) Si R est une $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre, avec $F' \supset F^{\mathrm{gal}}$, on a :

$$G(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)^{\mathrm{geom}} = \bigoplus_{\kappa \in X(\mathcal{T}_1)} G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)^{\mathrm{geom}}.$$

Constructions de fibrés automorphes. Dans la partie 2 on a introduit les formes modulaires de Hilbert classiques comme des sections globales de certains fibrés de formes différentielles holomorphes sur M^{an}. Dans ce paragraphe nous donnons des constructions de fibrés sur M^{an} et M, à partir de représentations de certains groupes. Ces fibrés serviront à redéfinir et étudier les formes modulaires de Hilbert arithmétiques.

Soit un poids algébrique κ et $n, m \in \mathbb{Z}[J_F]$ comme dans la définition 2.12. On notera V_n la représentation algébrique de G donnée par

$$V_n = \bigotimes_{\tau \in J_F} \mathrm{Sym}^{n_\tau} \otimes \mathrm{Det}^{m_\tau}. \tag{6}$$

• Considérons le revêtement universel $u : \mathfrak{H}_F \to M^{\mathrm{an}}$. Il est bien connu que l'on a une équivalence de catégories entre les représentations de Γ sur des K-vectoriels de dimension finie, qui sont triviales sur le centre, et les systèmes locaux en K-vectoriels $\mathbb{V}^{\mathrm{an}}$ sur M^{an}, qui à un K-vectoriel de dimension finie V muni d'une telle action de Γ associe le système local $\mathbb{V}^{\mathrm{an}}$ des sections continues de $\Gamma \backslash (\mathfrak{H}_F \times V) \to M^{\mathrm{an}}$ (V étant muni de la topologie discrète).

Définition 4.6. On note $\mathbb{V}_n^{\mathrm{an}}$ le système local associé à représentation V_n.

• Une autre construction de fibrés est donnée par la tour promodulaire $\widetilde{M_{\mathbb{Q}}} \to M_{\mathbb{Q}}$, où $\widetilde{M_{\mathbb{Q}}} = \operatorname{limproj}_{r \geq 1} M(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}r)_{\mathbb{Q}}$. On a une suite exacte

$$1 \to \pi_1(M_{\mathbb{Q}}, x)^{\mathrm{mod,geom}} \to \pi_1(M_{\mathbb{Q}}, x)^{\mathrm{mod}} = \mathrm{Gal}(\widetilde{M_{\mathbb{Q}}}/M_{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}) \to 1.$$

De plus, le groupe $\pi_1(M_{\mathbb{Q}}, x)^{\mathrm{mod}}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathfrak{o}})$; la projection sur la p-composante fournit un morphisme continu canonique

$$\pi_1(M_{\mathbb{Q}}, x)^{\mathrm{mod}} \to \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p).$$

On a donc un foncteur de la catégorie des représentations algébriques de G, vers celle des faisceaux lisses sur $M_{\mathbb{Q}}$. Ce foncteur associe à la représentation V le faisceau $\mathbb{V}$ des sections continues de $\pi_1(M_{\mathbb{Q}}, x)^{\mathrm{mod}} \backslash (\widetilde{M_{\mathbb{Q}}} \times V) \to M_{\mathbb{Q}}$.

Définition 4.7. On note $\mathbb{V}_n$ le faisceau lisse sur $M_{\mathbb{Q}}$ associé à V_n.

• Dans le cadre arithmétique le revêtement universel $\mathfrak{H}_F$ de la première construction est remplacé par le torseur $\mathfrak{M}' \overset{\mathcal{T}_1'}{\to} M'$ du paragraphe précédent. On a un foncteur de la catégorie des représentations algébriques du $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes $\mathcal{T}_1'$, vers celle des fibrés décomposables en fibrés inversibles sur M', qui à W_1 associe le produit contracté $\mathfrak{M}' \overset{\mathcal{T}_1'}{\times} W_1 =: \mathcal{W}_1$, défini comme le quotient par la relation d'équivalence $(mt, w) \sim (m, tw)$ pour $m \in \mathfrak{M}'$, $t \in \mathcal{T}_1'$ et $w \in W_1$.

Remarque 4.8. Pour chaque $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F] = X(\mathcal{T}_1)$, notons $W_{1,\kappa}$ la $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-représentation de $\mathcal{T}_1'$ associée à κ. On a $\mathcal{W}_{1,\kappa} = \underline{\omega}^{-\kappa}$. On peut ainsi redéfinir $G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})^{\mathrm{geom}}$ comme $\mathrm{H}^0(M', \mathcal{W}_{1,-\kappa})$.

• On suppose que D a un modèle entier $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta_F}]$ (c'est le cas pour $D = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ ou $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$). Rappelons que le $\mathfrak{o}$-fibré projectif de rang deux $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} = R^1 f_* \Omega^\bullet_{\mathcal{A}'/M'}$ est muni d'un accouplement parfait symplectique $\mathfrak{o}$-linéaire associé au choix d'un représentant λ de la classe de $\mathfrak{c}$-polarisations universelle $\overline{\lambda} = \mathfrak{o}^\times_{D+} \cdot \lambda$. On définit alors le $\mathcal{D}$-torseur

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{D}} = \mathrm{Isom}^{\mathcal{D}}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_M}(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_M, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_M} \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$$

au-dessus de M, dont les S-points sont ceux de $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_M}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_M, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_M} \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$ induisant via λ un élément de $\mathcal{D}(\mathcal{O}_S)$ dans $(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S)^\times$.

• On choisit pour modèle entier du tore maximal standard T de B le schéma en groupes $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{D}$. On en déduit un modèle entier de B dont $\mathcal{T}$ est tore maximal standard via $(u, \epsilon) \in \mathcal{T} \mapsto \begin{pmatrix} u \cdot \epsilon & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$. On va définir un $\mathcal{B}'$-torseur $\mathfrak{M}'_{\mathcal{B}} \overset{\mathcal{B}'}{\to} M'$ à l'aide du $\mathfrak{o}$-fibré $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}$ muni de la filtration de Hodge

$$0 \to \underline{\omega} \to \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \to \underline{\omega}^\vee \otimes \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1} \to 0.$$

Soit $L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$. On munit $L_0 \otimes \mathcal{O}_{M'}$ de la filtration canonique à deux crans associée à $\mathcal{B}'$: $0 \subset \mathfrak{c}^* \otimes \mathcal{O}_{M'} \subset L_0 \otimes \mathcal{O}_{M'}$. On définit alors $\mathfrak{M}'_{\mathcal{B}}$ comme le produit fibré de $\mathrm{Isom}^{\mathrm{fil}}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(L_0 \otimes \mathcal{O}_{M'}, \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$ et $\mathrm{Isom}^{\mathcal{D}}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M'}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}} \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$ au-dessus de $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M'}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}} \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$. C'est un $\mathcal{B}'$-torseur sur M'.

Il définit un foncteur $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}$ de la catégorie des représentations algébriques du $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes $\mathcal{B}'$ vers celle des fibrés sur M' qui sont des extensions successives de fibrés inversibles. Il est donné par le produit contracté : $V \mapsto \mathcal{V} := \mathfrak{M}'_{\mathcal{B}} \overset{\mathcal{B}'}{\times} V$, (c'est-à-dire le quotient par la relation $(\widetilde{m}b, v) \sim (\widetilde{m}, bv)$, pour $\widetilde{m} \in \mathfrak{M}'_{\mathcal{B}}$, $b \in \mathcal{B}'$ et $v \in V$).

Définition 4.9. On note $\mathcal{V}_n$ le fibré filtré sur M' image de V_n par $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}$.

• Si W est une $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-représentation du tore $\mathcal{T}'$ (sur un $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-module libre de type fini) on peut la voir comme une représentation de $\mathcal{B}'$, en faisant agir le radical unipotent $\mathcal{U}'$ trivialement. Le foncteur $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}$ associe à W un fibré $\mathcal{W}$ décomposable en somme directe de fibrés inversibles.

On pourrait également construire $\mathcal{W}$ à l'aide du $\mathcal{T}'$-torseur $\mathfrak{M}' \times_{M'} \mathfrak{M}'_{\mathcal{D}}$.

Définition 4.10. Soient $n, m \in \mathbb{Z}[J_F]$ et $c \in \mathbb{Z}$ tels que $n + 2m = ct$. Soit $W_{n,c}$ la représentation irréductible de $\mathcal{T}'$, donnée par le caractère

$$(u, \epsilon) \in \mathcal{T}'_1 \times \mathcal{D}' \mapsto u^n \epsilon^m.$$

On note $\mathcal{W}_{n,c}$ le fibré inversible sur M' image de $W_{n,c}$ par le foncteur $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}$.

• Considérons le modèle entier $\mathcal{G}$ de G sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta_F}]$ par

$$\mathcal{G} = \mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}} \mathrm{GL}_2 \times_{\mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}} \mathcal{D}.$$

On introduit pour finir un $\mathcal{G}'$-torseur $\mathfrak{M}_{\mathcal{G}'} \xrightarrow{\mathcal{G}'} M'$ à l'aide de $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} = R^1 f_* \Omega^\bullet_{\mathcal{A}'/M'}$ muni de sa connexion de Gauss–Manin qui est intégrable. Plus précisément, on munit $L_0 \otimes \mathcal{O}_{M'}$ de la connexion plate $\mathrm{Id} \otimes d$ et on pose

$$\mathfrak{M}'_{\mathcal{G}} = \mathrm{Isom}^{\mathcal{D}}_{\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M'}}(L_0 \otimes \mathcal{O}_{M'}, \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}).$$

Il définit un foncteur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}'}$ de la catégorie des représentations algébriques du $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes $\mathcal{G}'$ vers celle des fibrés sur M' munis d'une connexion intégrable. Il est donné par le produit contracté : $V \mapsto \mathcal{V}^\nabla := \mathfrak{M}'_{\mathcal{G}} \overset{\mathcal{G}'}{\times} V$, (c'est-à-dire le quotient par la relation $(\widetilde{m}g, v) \sim (\widetilde{m}, gv)$, pour $\widetilde{m} \in \mathfrak{M}'_{\mathcal{G}}$, $g \in \mathcal{G}'$ et $v \in V$).

Définition 4.11. On note $\mathcal{V}_n^\nabla$ le fibré à connexion sur M' image de V_n par le foncteur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}'}$.

Pour une $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-représentation algébrique V de G, on peut comparer $\mathbb{V}^{\mathrm{an}}$, $\mathbb{V}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^\nabla$ comme suit

Proposition 4.12. 1) *Sur M', on a $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\nabla$ et*
2) *Sur M^{an}, on a $\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{O}_{M^{\mathrm{an}}} \cong \mathbb{V}^{\mathrm{an}} \otimes \mathcal{O}_{M^{\mathrm{an}}}$ et $\mathbb{V}^{\mathrm{an}} \otimes \mathbb{Z}_p \cong (\mathbb{V})^{\mathrm{an}}$.*

Pour la démonstration de ce résultat, voir [27] Sect.5.2.2, lemme 9.

5 Compactifications arithmétiques de la variété de Hilbert

Dans cette partie nous énonçons le résultat principal de [7] en conservant les notations de cette référence. En particulier, nous utiliserons la notion de $(R, \mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ (Déf.3.2 de [7]) à qui sont associés les objets suivants : des idéaux $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $X = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$; une racine de l'unité $\zeta_{\mathcal{C}}$ d'ordre l'exposant n du groupe $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$; des groupes d'unités $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$, $\mathfrak{o}^\times_{\overline{\mathcal{C}}}$, $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$, $\mathfrak{o}^\times_{\overline{\mathcal{C}},1}$; des sous-groupes $H_{\mathcal{C}} = \mathfrak{o}^\times_{\overline{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$, $H_{\mathcal{C},1} = \mathfrak{o}^\times_{\overline{\mathcal{C}},1}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ du groupe $(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^\times$.

De façon imprécise mais suggestive, on peut penser à une $(R,\mathfrak{n})$-composante comme à une orbite sous le groupe de Galois d'une $(R,\mathfrak{n})$-pointe (*loc. cit.* pour plus de détails).

Définition 5.1. Un *éventail* Γ*-admissible* $\Sigma=(\Sigma^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ est la donnée pour chaque $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ d'un éventail complet $\Sigma^{\mathcal{C}}$ de X^*_+, stable par $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ et contenant un nombre fini d'éléments modulo cette action, de sorte que les données soient compatibles aux isomorphismes de $(R,\mathfrak{n})$-composantes $\mathcal{C}\cong\mathcal{C}'$.

On se fixe un éventail lisse Γ-admissible $\Sigma=(\Sigma^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$.

Soit $R_{\mathcal{C}}=\mathbb{Z}[q^\xi;\,\xi\in X]$. Soit $S_{\mathcal{C}}=\mathrm{Spec}(R_{\mathcal{C}})=\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes X^*$ le tore sur $\mathbb{Z}$ de groupe des caractères $X=\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{d}'$.

Soit $S_{\mathcal{C}}\hookrightarrow S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$, l'immersion torique associée. On rappelle qu'elle est obtenue en recollant, pour $\sigma\in\Sigma^{\mathcal{C}}$, les immersions toriques affines $S_{\mathcal{C}}\hookrightarrow S_{\mathcal{C},\sigma}=\mathrm{Spec}(R_{\mathcal{C},\sigma})$, où $R_{\mathcal{C},\sigma}=\mathbb{Z}[q^\xi;\,\xi\in X\cap\check{\sigma}]$. Soit $S^\wedge_{\mathcal{C},\sigma}$ le complété de $S_{\mathcal{C},\sigma}$ le long de $S^\infty_{\mathcal{C},\sigma}:=S_{\mathcal{C},\sigma}\setminus S_{\mathcal{C}}$ et $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ le complété de $S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ le long de $S^\infty_{\Sigma^{\mathcal{C}}}:=S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}\setminus S_{\mathcal{C}}$.

Posons $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}=\mathrm{Spec}(R^\wedge_{\mathcal{C},\sigma})$ et $\overline{S}^0_{\mathcal{C},\sigma}=S_{\mathcal{C}}\underset{S_{\mathcal{C},\sigma}}{\times}\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}=\mathrm{Spec}(R^\wedge_{\mathcal{C},\sigma}\otimes_{R_{\mathcal{C},\sigma}}R)$. Si $\sigma'\subset\sigma$, on a une flèche $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma'}\to\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}$.

Le théorème suivant est une variante pour le groupe Γ des théorèmes de Rapoport [30], et Chai [3] ; les modifications nécessaires pour son énoncé et sa démonstration sont données dans [7].

Théorème 5.2. *Soit $\Sigma=\{\Sigma^{\mathcal{C}}\}_{\mathcal{C}}$ un éventail Γ-admissible lisse.*

(i) *Il existe un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma propre $\overline{M}=M_\Sigma$ lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$, une immersion ouverte $j:M\hookrightarrow\overline{M}$ et un isomorphisme de schémas formels*

$$\varphi:\coprod_{(R,\mathfrak{n})-\text{composantes}/\sim}\left(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}\right)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}})\xrightarrow{\sim}\overline{M}^\wedge,$$

où $\overline{M}^\wedge$ est le complété formel de $\overline{M}$ le long du diviseur à croisements normaux à l'infini $\overline{M}\setminus M$.

(ii) *Il existe un unique schéma en groupes semi-abélien $\overline{f}:\mathfrak{G}\to\overline{M^1}$ qui prolonge la VAHB universelle $f:\mathcal{A}\to M^1$. Ce schéma en groupes est muni d'une action de $\mathfrak{o}$ au-dessus de $\overline{M^1}$ prolongeant celle sur $\mathcal{A}$. C'est un tore au-dessus de $\overline{M^1}\setminus M^1$.*

(iii) *On a un isomorphisme de Kodaira–Spencer logarithmique :*

$$\Omega_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty)\cong\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}\otimes_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M^1}}}(\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}\otimes_{\mathfrak{o}}\mathfrak{d}\mathfrak{c}^{-1}),$$

où $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}=\overline{e}^*\Omega_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$, en notant $\overline{e}:\overline{M^1}\to\mathfrak{G}$ la section unité de $\overline{f}$. En outre $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M}}$ coïncide avec le faisceau $(\overline{f}_*\Omega_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}})^{\mathfrak{G}}$ des $\mathfrak{G}$-invariants de $\overline{f}_*\Omega_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$.

(iv) *Le $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma*

$$M^{1*}=\mathrm{Proj}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]}\left(\oplus_{k\geq0}\Gamma(\overline{M^1},\underline{\omega}^{kt}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}})\right),$$

est indépendant du choix de Σ. Le morphisme canonique $\pi:\overline{M^1}\to M^{1*}$ est surjectif et équivariant pour l'action du groupe fini $\mathfrak{o}^\times_{D+}/(\mathfrak{o}^\times_{D+}\cap\mathfrak{o}^{\times2}_{\mathfrak{n}})$. Le quotient de M^{1*} pour *cette action est un schéma projectif, normal, de type fini, noté M^*. La restriction à M de la surjection canonique $\pi : \overline{M} \to M^*$ induit un isomorphisme sur un ouvert dense de M^*, noté encore M.*

(v) *Le schéma $M^* \backslash M$ est fini et étale sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ et il est isomorphe à :*

$$\coprod_{(R,\mathfrak{n})-\text{composantes}/\sim} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}}).$$

Les composantes connexes de $M^* \backslash M$ sont appelées les pointes de M. Cependant celles-ci ne sont des points fermés que pour les $(R, \mathfrak{n})$-composantes non-ramifiées.

(vi) *La complétion formelle de $\overline{M}$ le long de l'image réciproque $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ d'une $(R, \mathfrak{n})$-composante non-ramifiée $\mathcal{C}$, est canoniquement isomorphe à*

$$\left(S^{\wedge}_{\Sigma^{\mathcal{C}}} / _{\mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^{\times} \times \mathfrak{o}_{D+}^{\times}}\right) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]).$$

Pour le (iii), on voit localement en passant aux variétés de Tate au voisinage de chaque pointe que la flèche de Kodaira–Spencer induit un isomorphisme.

6 Compactifications toroïdales des variétés de Kuga–Sato

Dans toute cette partie, on se limite au cas du groupe de niveau Γ^1, $(D = \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ et donc $M^{\mathrm{an}} = M^{1,\mathrm{an}}$ de sorte qu'il y a une VAHB analytique universelle $\mathcal{A}^{\mathrm{an}} \to M^{\mathrm{an}}$.

La variété analytique de Kuga–Sato $\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}$ est définie comme le produit fibré s-fois de $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$ au-dessus de M^{an}. Soit $\overline{M^{\mathrm{an}}}$ une compactification toroïdale de M^{an}, comme dans la partie précédente. On note de même $\mathfrak{G}^s$ le produit fibré s fois de $\mathfrak{G}$ par lui-même au-dessus de $\overline{M^{\mathrm{an}}}$. On veut compactifier $\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}$ en une variété analytique $\overline{\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}}$ projective lisse au-dessus de $\overline{M^{\mathrm{an}}}$ de manière à ce que le schéma semi-abélien $\mathfrak{G}^s$ opère naturellement dessus, en prolongeant l'action par translation de $\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}$ sur elle-même. Le caractère naturel de ce prolongement sera détaillé dans l'énoncé du théorème 6.4 plus bas.

Nous procéderons en effectuant des compactifications partielles de chaque pointe à l'aide d'immersions toroïdales, puis en recollant ces dernières on obtiendra la compactification cherchée.

Si on pose $(\mathcal{A}^{\mathrm{an}}_{\gamma,H})^s = \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{R}} \backslash (W_H \times (F \otimes \mathbb{C})^s)/(\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*)^s$, la description de la VAHB au voisinage de la pointe $\mathcal{C} = \gamma\infty$, faite dans la partie 2, donne :

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathcal{A}^{\mathrm{an}}_{\gamma,H})^s & \longleftarrow & X^* \backslash (W_H \times (F \otimes \mathbb{C})^s)/(\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*)^s & \hookrightarrow & (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes X^* \times (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)^s)/\mathfrak{b}^s \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{R}} \backslash W_H & \xleftarrow{\mathrm{mod}\ \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}} & X^* \backslash W_H = D_{\gamma,H} & \hookrightarrow & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes X^* =: S_{\mathcal{C}}
\end{array}$$

où on rappelle que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ et $X = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$.

Le groupe $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$ (produit semi-direct donné par $(\beta_1, \ldots, \beta_s; (u, \epsilon))(\beta_1', \ldots, \beta_s'; (u', \epsilon')) = (\beta_1 + \beta_1' u^{-1}\epsilon^{-1}, \ldots, \beta_s + \beta_s' u^{-1}\epsilon^{-1}; (uu', \epsilon\epsilon')))$ agit à gauche sur $X_+^* \times (\mathfrak{a}^*)^s$, ainsi que sur $(F \otimes \mathbb{R})_+ \times (F \otimes \mathbb{R})^s$, par :

$$(\beta_1, \dots, \beta_s; (u, \epsilon)) \cdot (q; l_1, \dots, l_s) = (u^2\epsilon q, ul_1 + u^2\epsilon q\beta_1, \dots, ul_s + u^2\epsilon q\beta_s)$$

Notons que cette action est bien définie, car $X^*\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}^*$.

On aimerait ajouter à $\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes X^* \times (\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{a}^*)^s$ une frontière analytique $\mathcal{F}$ au dessus de la frontière analytique $\mathcal{E}$ de $S_\mathcal{C}$ et sur laquelle $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}_\mathcal{C}^\times$ agit discontinument et de manière compatible avec l'action de $\mathfrak{o}_\mathcal{C}^\times$ sur $\mathcal{E}$. Le quotient par $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}_\mathcal{C}^\times$ de l'adhérence de $q(D_{\gamma,H}) \times (\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{a}^*)^s$ dans $\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes X^* \times (\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{a}^*)^s \cup \mathcal{F}$ serait alors la compactification partielle de la pointe $\mathcal{C}$ (voir la partie 3).

Le problème se traduit en le problème combinatoire suivant :

Soit un éventail complet Σ de $X^*_{\mathbb{R}+} = \{0\} \cup \mathbb{R}_+^{*J_F}$, stable pour l'action de $\mathfrak{o}_+^\times$ et qui contient un nombre fini d'éléments modulo cette action. Trouver un éventail complet $\widetilde{\Sigma}$ de $X^*_{\mathbb{R}+} \times (\mathfrak{a}^*_\mathbb{R})^s$ stable pour l'action de $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}_+^\times$, contenant un nombre fini d'éléments modulo cette action et tel que la projection de chaque $\tau \in \widetilde{\Sigma}$ sur $X^*_{\mathbb{R}+}$ soit un des $\sigma \in \Sigma$.

Soit ξ_0^* un élément de X_+^* de norme minimale. Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1}$ une base de $\mathfrak{o}^{\times 2}$ et posons $\Pi = \left\{ \prod_{i \in I} \varepsilon_i \mid I \subset \{1, \dots, d-1\} \right\}$. Alors l'ensemble Σ des intérieurs des $\bigcap_{u \in U} \mathbb{R}_+ \operatorname{Conv}_{\varepsilon \in \Pi}(u\varepsilon\xi_0^*)$, avec U décrivant les sous-ensembles finis de $\mathfrak{o}^{\times 2}$, est un éventail complet de $X^*_{\mathbb{R}+}$, stable pour l'action de $\mathfrak{o}^\times$ et contenant un nombre fini d'éléments modulo cette action.

Soit $e^{(1)}, \dots, e^{(d)}$ une base de $\mathfrak{b}$ et posons $\Pi' = \left\{ \sum_{i \in I} e^{(i)} \mid I \subset \{1, \dots, d\} \right\}$. Considérons l'ensemble $\widetilde{\Sigma}''$ des cônes fermés suivants :

$$\mathbb{R}_+ \operatorname{Conv}_{\varepsilon \in \Pi; e_1, \dots, e_s \in \Pi'} \left((u^2\varepsilon^2\xi_0^*; (\beta_1 + e_1)u\varepsilon^2, \dots, (\beta_s + e_s)u\varepsilon^2) \right),$$

avec $\beta = (u; \beta_1, \dots, \beta_s)$ décrivant $(\mathfrak{o}^\times/\{\pm 1\}) \times \mathfrak{b}^s$.

Il ne suffit pas de prendre les intérieurs des intersections finies de tels cônes pour obtenir l'éventail cherché $\widetilde{\Sigma}$, car *l'intersection de deux cônes de $\widetilde{\Sigma}''$ n'est pas forcément une face de chacun*. Cependant, on n'en est pas loin, car une face donnée d'un cône de $\widetilde{\Sigma}''$ ne rencontre qu'un nombre fini parmi les autres cônes. De ce fait :

1) si on découpe un des cônes de $\widetilde{\Sigma}''$ (en prenant par exemple un point rationnel à l'intérieur, bien que cela ne soit pas forcément nécessaire) de façon que les autres cônes intersectent les nouveaux cônes ainsi obtenus en des faces de ces-derniers, et

2) si on découpe les autres cônes en conséquence, en translatant le découpage du 1) par le groupe $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}_+^\times$,

alors on obtiendra un nouvel ensemble de cônes fermés $\widetilde{\Sigma}'$ qui sera plus fin que $\widetilde{\Sigma}''$ et dans lequel l'intersection de deux cônes sera une face de chacun.

L'ensemble $\widetilde{\Sigma}$ des intérieurs des intersections finies de cônes de $\widetilde{\Sigma}'$ sera alors un éventail complet de $X^*_{\mathbb{R}+} \times (\mathfrak{a}^*_\mathbb{R})^s$ stable pour l'action de $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}_+^\times$, contenant un nombre fini d'éléments modulo cette action et tel que la projection de chaque $\tau \in \widetilde{\Sigma}$ sur $(F \otimes \mathbb{R})_+$ soit un des $\sigma \in \Sigma$. □

Quitte à raffiner $\widetilde{\Sigma}$, on pourra le supposer lisse.

Par la même méthode que dans la partie 3 on obtient alors une compactification lisse de la forme voulue de $\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}$. L'énoncé précis sera donné plus tard dans cette partie, dans le cas arithmétique (le cas analytique en découle par les arguments habituels).

Compactifications arithmétiques des variétés de Kuga–Sato. On rappelle que dans cette partie, on se limite au cas du schéma de modules fin $M = M^1$, de sorte qu'il existe une VAHB universelle $\mathcal{A} \to M$ par le Théorème 4.1. Soit Σ un éventail Γ-admissible et $M \hookrightarrow \overline{M}_\Sigma = \overline{M} \hookleftarrow D$ la compactification toroïdale associée, avec D diviseur à croisements normaux.

Pour chaque entier $s \geq 1$ on définit la variété de Kuga–Sato $\mathcal{A}^s = \mathcal{A} \underset{M}{\times} \dots \underset{M}{\times} \mathcal{A}$ (s-fois), qui est munie d'un morphisme projectif lisse $f_s : \mathcal{A}^s \to M$.

Le but est de construire (en s'inspirant de [11]) des compactifications toroïdales $\mathcal{A}^s \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}^s} = \mathcal{A}^s_{\underset{\Sigma}{\sim}} \hookleftarrow E$, avec E diviseur à croisements normaux relatif, au-dessus des compactifications toroïdales de M. En d'autres termes on veut obtenir un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^s \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_s"] & \overline{\mathcal{A}^s} \arrow[d, "\overline{f_s}"] & E \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
M \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \overline{M}_\Sigma \arrow[d] & D \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]) &
\end{tikzcd}$$

avec $\overline{f_s}$ semi-stable et projectif.

L'importance de l'existence d'une variété $\overline{\mathcal{A}^s} \to \overline{M}$ pour chaque valeur de l'entier s apparaîtra clairement dans la section sur la théorie de Hodge. Pour démontrer le théorème de dégénérescence de la suite spectrale BGG duale vers de Rham, on doit en effet recourir, suivant [11], VI.5.5, au théorème de Deligne de dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham pour $\overline{f_s} : \overline{\mathcal{A}^s} \to \overline{M}$.

L'éventail considéré dans la partie précédente pour la compactification analytique ne peut pas être réutilisé ici, car la méthode de [11] utilise des éventails munis d'une fonction de polarisation. On utilise la décomposition de Voronoi–Delaunay, qui est naturellement munie d'une fonction de polarisation (voir aussi [24]).

Données de dégénérescence.

Définition 6.1. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathfrak{o}$ tels que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{c}$. Des données de dégénérescence, pour la variété de Kuga–Sato consistent en :

– (polarisation) des morphismes $\mathfrak{o}$-linéaires $\phi_i : \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$, $1 \leq i \leq s$.

– (flèche tautologique) une forme bilinéaire $b : \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} \to \mathbb{Z}$ telle que pour tout $m \in \mathfrak{o}$, $\alpha \in \mathfrak{a}$ et $\beta \in \mathfrak{b}$ on ait $b(m\beta, \alpha) = b(\beta, m\alpha)$ et telle pour tout $1 \leq i \leq s$ l'application $b(\cdot, \phi_i(\cdot))$ soit une forme bilinéaire définie positive sur $\mathfrak{b}$.

Soit $\mathcal{C}$ une $(R, \mathfrak{n})$-pointe, donnée par un réseau L de F^2, une suite exacte de $\mathfrak{o}$-modules $0 \to \mathfrak{a}^* \to L \to \mathfrak{b} \to 0$ et une application $\mathfrak{o}$-linéaire injective $\alpha : \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1} \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1}L/L$. On associe à $\mathcal{C}$ l'idéal $X = \mathfrak{a}\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (voir [7] section 3). A chaque $(\xi^*, (\mu_i)_{1 \leq i \leq s}) \in X_+^* \times \mathfrak{c}_+^s$, on peut associer des données de dégénérescence $\phi_i = \phi_{\mu_i}$ et $b = b_{\xi^*}$, définies par : pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$, $\beta \in \mathfrak{b}$ et $1 \leq i \leq s$ $\phi_i(\beta) = \mu_i\beta$ et $b(\beta, \alpha) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi^*\alpha\beta)$.

On pose $C_+ = X_+^*$ et $\widetilde{C}_+ = C_+ \times (\mathfrak{a}^*)^s$. Le groupe $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ agit à gauche sur $\widetilde{C}_+$ (de même que dans (1) le groupe $(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \rtimes \Gamma$ agit sur $\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C})$) par

$$\begin{cases} (u,\epsilon)(q;l_1,\ldots,l_s) = (u^2\epsilon q; ul_1,\ldots,ul_s) \\ (\beta_1,\ldots,\beta_s)(q;l_1,\ldots,l_s) = (q; l_1+\beta_1 q,\ldots,l_s+\beta_s q) \end{cases}.$$

Fonctions de polarisation. Le but est de construire :

• Un éventail $\Sigma^{\mathcal{C}}$ de $C_{\mathbb{R}+}$ qui est $\mathfrak{o}^\times$-admissible.

• Un éventail $\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ de $\widetilde{C}_{\mathbb{R}+}$ qui est $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$-admissible et tel que pour tout $\tau \in \widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$, il existe $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$ tel que $\mathrm{pr}_1(\tau) \subset \sigma$. Si de plus cette inclusion est une égalité l'éventail sera dit *équidimensionnel*.

• Une *fonction de support* sur $\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$, i.e. une fonction $\varphi : \widetilde{C}_{\mathbb{Q}+} \to \mathbb{Q}$ qui est continue, convexe, entière sur $X^* \times (\mathfrak{a}^*)^s$ linéaire sur chaque $\tau \in \widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ (donc linéaire par morceaux), $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$-invariante et telle que pour tout $\lambda \geq 0$ $\varphi(\lambda \cdot) = \lambda\varphi(\cdot)$.

Si de plus φ est strictement convexe au-dessus de chaque $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$ (i.e. pour tout $\tau \in \widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$, il existe $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{l}^* \in X \times \mathfrak{a}^s$ tels que

$$\tau = \{\widetilde{l} = (q,l) \in \widetilde{C}_+ \mid q \in \sigma,\ n\varphi(\widetilde{l}) = \langle \widetilde{l}^*, \widetilde{l}\rangle\},$$

alors φ est appelée une *fonction de polarisation*.

Décomposition de Voronoi–Delaunay. Fixons une $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$, ainsi que des $\mu_i \in \mathfrak{c}_+$, $1 \leq i \leq s$. On a ainsi des polarisations $\phi_i = \phi_{\mu_i}$, $1 \leq i \leq s$.

Pour tout choix de $\beta = (\beta_i)_{1\leq i\leq s} \in \mathfrak{b}^s$, on définit une fonction :

$$\chi_\beta : \widetilde{C}_{\mathbb{Q}+} \to \mathbb{Q}\ ,\ (q,l_1,\ldots,l_s) \mapsto \sum_{1\leq i\leq s} b_q(\beta_i, \phi_i(\beta_i)) + 2l_i(\phi_i(\beta_i)).$$

L'application χ_β est la composée de

$$(q,l_1,\ldots,l_s) \mapsto \sum_{1\leq i\leq s} q\mu_i\beta_i^2 + 2l_i\mu_i\beta_i$$

avec l'application trace $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} : F \to \mathbb{Q}$.

On pose pour $\widetilde{l} = (q, l = (l_1,\ldots,l_s)) \in \widetilde{C}_{\mathbb{Q}+}$

$$\varphi(\widetilde{l}) = \min_{\beta\in\mathfrak{b}^s} \chi_\beta(\widetilde{l}),$$

L'application φ est 1-*tordue*, au sens de [11], car pour tout $\beta \in \mathfrak{b}^s$ on a

$$\varphi(\beta\cdot(q,l)) = \min_{\beta'\in\mathfrak{b}^s} \chi_{\beta'}(q, l+q\beta) = \min_{\beta'\in\mathfrak{b}^s} \chi_{\beta+\beta'}(q,l) - \chi_\beta(q,l) = \varphi(\widetilde{l}) - \chi_\beta(\widetilde{l})$$

Pour $\sigma \in \Sigma$ fixé et $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{b}^s$ un sous-ensemble fini on définit :

$$\tau_{\sigma,\mathfrak{B}} = \{\widetilde{l} = (q,l) \in \widetilde{C}_+ \mid q \in \sigma,\ \forall\beta \in \mathfrak{B}\ \ \chi_\beta(\widetilde{l}) = \varphi(\widetilde{l})\}.$$

Proposition 6.2. *L'éventail* $\widetilde{\Sigma} = \{\tau_{\sigma,\mathfrak{B}}\}$ *est un éventail complet* $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times-$ *admissible, équidimensionnel de* $\widetilde{C}_+$ *et* φ *est une fonction de polarisation* 1*-tordue. Il existe une subdivision lisse de* $\widetilde{\Sigma}$*, muni d'une polarisation k-tordue, pour un certain* $k \geq 1$.

On se propose de calculer l'action de $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$ sur l'éventail $\widetilde{\Sigma}$.

Pour $\beta \in \mathfrak{b}^s$ on a $\chi_\beta(q,l) = \varphi(q,l)$, si et seulement si pour tout , $e \in \mathfrak{b}^s$ on a $\chi_{\beta+e}(q,l) - \chi_\beta(q,l) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2l + q(2\beta + e))\mu) \geq 0$. On en déduit

$$\tau_{\sigma,\mathfrak{B}} = \{(q,l) \in \widetilde{C}_+ \mid q \in \sigma,\ \forall \beta \in \mathfrak{B},\ \forall e \in \mathfrak{b}^s \quad \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2l + q(2\beta + e))\mu) \geq 0\}.$$

Pour tout $u \in \mathfrak{o}^\times$ on a

$$\begin{aligned} u \cdot \tau_{\sigma,\mathfrak{B}} &= \{(u^2 q, ul) \in \widetilde{C}_+ \mid q \in \sigma,\ \forall \beta \in \mathfrak{B},\ \forall e \in \mathfrak{b}^s \quad \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2l + q(2\beta + e))\mu) \geq 0\} \\ &= \{(u^2 q, ul) \in \widetilde{C}_+ \mid u^2 q \in u^2\sigma, \\ &\qquad\qquad \forall \beta, \forall e\, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(u^{-1} e(2ul + u^2 q(2u^{-1}\beta + u^{-1}e))\mu) \geq 0\} \\ &= \tau_{u^2\sigma, u^{-1}\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Si $y \in \mathfrak{b}^s$ on a

$$\begin{aligned} y \cdot \tau_{\sigma,\mathfrak{B}} &= \{(q, l + qy) \in \widetilde{C}_+ \mid q \in \sigma, \\ &\qquad\qquad \forall \beta \in \mathfrak{B},\ \forall e \in \mathfrak{b}^s \quad \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2l + q(2\beta + e))\mu) \geq 0\} \\ &= \{(q, l - 2qy) \in \widetilde{C}_+ \mid q \in \sigma, \\ &\qquad\qquad \forall \beta, \forall e \quad \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2(l + qy) + q(2(\beta - y) + e))\mu) \geq 0\} \\ &= \tau_{\sigma, \mathfrak{B} - y}. \end{aligned}$$

Le diagramme suivant décrit l'action de $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$ sur l'éventail $\widetilde{\Sigma}$.

$$\begin{tikzcd} \tau_{\sigma,\mathfrak{B}} \arrow[r, "\cdot u"] \arrow[d, "\cdot y"] & \tau_{u^2\sigma, u^{-1}\mathfrak{B}} \arrow[d, "\cdot y u^{-1} = u \cdot y"] \\ \tau_{\sigma, \mathfrak{B} - y} \arrow[r, "\cdot u"] & \tau_{u^2\sigma, u^{-1}\mathfrak{B} - u^{-1} y} \end{tikzcd}$$

Modèles relativement complets faibles. On introduit la notion de *modèles relativement complets faibles polarisés* dans le cas totalement dégénéré qui nous intéresse (voir [11] VI.1.7, ainsi que la partie 2 de [28]).

Soit R un anneau excellent, intégralement clos, noethérien, complet pour la topologie I-adique, pour un idéal radiciel $I = \sqrt{I}$. Soit K le corps des fractions de R. Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$, η son point générique et $S_0 = \mathrm{Spec}(R/I)$ le sous-schéma fermé défini par I.

Considérons le tore déployé $\widetilde{G} = (\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^*)^s \times S = \mathrm{Spec}(R[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}^s])$ sur S. Un ensemble de périodes $\mathfrak{b}^s \subset \widetilde{G}(K)$ équivaut à la donnée d'une application bilinéaire non-dégénérée $\mathfrak{b}^s \times \mathfrak{a}^s \to K^\times$, $(\beta, \alpha) \mapsto \mathfrak{X}^\alpha(\beta)$. Une polarisation ϕ sur l'ensemble des périodes $\mathfrak{b}^s$ est la donnée d'un homomorphisme $\mathfrak{o}$-linéaire $\phi : \mathfrak{b}^s \to \mathfrak{a}^s$, tel que :

(i) $\mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta') = \mathfrak{X}^{\phi(\beta')}(\beta)$, pour tout $\beta, \beta' \in \mathfrak{b}^s$,

(ii) $\mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta) \in I$, pour tout $\beta \in \mathfrak{b}^s \setminus \{0\}$.

Définition 6.3. Un *modèle relativement complet faible polarisé* de $\widetilde{G}$, par rapport à $(\mathfrak{b}^s, \phi)$, est la donnée des éléments suivants :

(a) Un schéma intègre $\widetilde{P}$, localement de type fini sur R, dont la fibre générique est isomorphe à $\widetilde{G}_\eta$.

(b) Un faisceau inversible $\widetilde{\mathcal{L}}$ sur $\widetilde{P}$.

(c) Une action du tore $\widetilde{G}$ sur $(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}})$, étendant l'action par translation sur la fibre générique et son faisceau structural. On note cette action $S_g : \widetilde{P} \to \widetilde{P}$, $S_g^* : \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, pour tout point fonctoriel g de $\widetilde{G}$.

(d) Une action de $\mathfrak{b}^s$ sur $(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}})$, notée $T_\beta : \widetilde{P} \to \widetilde{P}$ et $T_\beta^* : \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, étendant l'action de $\mathfrak{b}^s$ sur $\widetilde{G}_\eta$ par translation (via $\mathfrak{b}^s \subset \widetilde{G}(K)$).

satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Il existe un ouvert $\widetilde{G}$-invariant $U \subset \widetilde{P}$ de type fini sur S et tel que $\widetilde{P} = \cup_{\beta \in \mathfrak{b}^s} T_\beta(U)$.

(ii) $\widetilde{\mathcal{L}}$ est ample sur $\widetilde{P}$, au sens que les compléments des lieux des zéros des sections globales $\Gamma(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes n})$, $n \geq 1$, forment une base de la topologie de Zariski de $\widetilde{P}$.

(iii) Pour toute valuation v sur $R(\widetilde{G})$ (le corps des fonctions rationnelles sur $\widetilde{G}$), qui est positive sur R, on a :

v a du centre sur $\widetilde{P} \iff$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}^s$, il existe $\beta \in \mathfrak{b}^s$ avec $v(\mathfrak{X}^\alpha(\beta)\mathfrak{X}^\alpha) \geq 0$.

L'intérêt des modèles relativement complets faibles polarisés $(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}})$ est qu'en suivant les flèches du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{P} & \widetilde{\mathfrak{P}} \arrow[l, "\text{complétion}"'] \arrow[d, "\text{quotient formel par } \mathfrak{b}^s"'] \\ P & \mathfrak{P} \arrow[l, "\text{algébrisation}"] \end{tikzcd}$$

l'on peut construire “le quotient” $(P, \mathcal{L})$ de $(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}})$ par le groupe des périodes $\mathfrak{b}^s$. Nous allons utiliser cette construction dans le théorème suivant.

Énoncé du théorème. Soient $\mu_i \in \mathfrak{c}_+$, $1 \leq i \leq s$. Soit $\mathcal{A}^s = \mathcal{A} \times_M \ldots \times_M \mathcal{A}$. Soit $\Sigma = (\Sigma^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ un éventail complet et lisse de $C_{\mathbb{R}+}$ qui est $\mathfrak{o}^\times$-admissible et soit $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ éventail complet et lisse de $\widetilde{C}_{\mathbb{R}+}$ qui est $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$-admissible, équidimensionnel au-dessus de Σ et muni d'une fonction de polarisation k-tordue φ.

Théorème 6.4. *Il existe un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma $\overline{\mathcal{A}^s} = \mathcal{A}^s_{\widetilde{\Sigma}}$ propre (et même projectif) sur $\overline{M} = M_\Sigma$, muni d'un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ tel que :*

(i) *$\overline{\mathcal{A}^s}|_M = \mathcal{A}^s$ est la variété de Kuga–Sato universelle au-dessus de M et $\mathcal{L}|_{\mathcal{A}^s}$ s'identifie avec la puissance tensorielle k-ième du faisceau inversible ample $\otimes_i \mathrm{pr}_i^* \mathcal{L}_{\mu_i}$, où pour $1 \leq i \leq s$, $\mathrm{pr}_i : \mathcal{A}^s \to \mathcal{A}$ désigne la i-ième projection et $\mathcal{L}_{\mu_i}$ désigne le faisceau ample inversible canonique sur $\mathcal{A}$, obtenu par pull-back du faisceau de Poincaré par le morphisme* $(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}, \lambda \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \mu_i))$.

(ii) *$\overline{\mathcal{A}^s}$ possède une stratification naturelle paramétrée par $\widetilde{\Sigma}/(\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times)$.*

(iii) *Le schéma $\overline{\mathcal{A}^s}$ est lisse sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ et $\overline{\mathcal{A}^s} \setminus \mathcal{A}^s$ est un diviseur à croisements normaux relatif sur $\overline{M}$. Le morphisme $\overline{f_s} : \overline{\mathcal{A}^s} \to \overline{M}$ est semi-stable.*

Supposons que pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe $\tau \in \widetilde{\Sigma}$ tel que $\sigma \times \{0\} = \tau$. Alors :

(iv) *Le schéma semi-abélien $\mathfrak{G}^s$ est contenu comme ouvert dense dans $\overline{\mathcal{A}^s}$ et la restriction de $\mathcal{L}$ à $\mathfrak{G}^s$ coïncide, comme dans le* (i) *avec la puissance tensorielle k-ième du faisceau inversible ample canonique $\otimes_i \mathrm{pr}_i^* \mathcal{L}_{\mu_i}$. De plus $\mathfrak{G}^s \to \overline{M}$ agit sur $\overline{\mathcal{A}^s}$ en prolongeant l'action de $\mathcal{A}^s$ sur lui-même par translation.*

(v) *Le faisceau $\Omega^1_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$ est isomorphe à $\overline{f_s}^*(\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M}}{}^{\oplus s})$.*

(vi) *Pour tout couple d'entiers $a, b \geq 0$, on a des isomorphismes canoniques*

$$R^a\overline{f_s}_*\Big(\bigwedge^b \Omega^1_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M}}(\mathrm{dlog}\,\infty)\Big) \cong \bigwedge^a (\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}\otimes \underline{\omega}^\vee_{\mathfrak{G}/\overline{M}})^{\oplus s} \otimes \bigwedge^b \underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M}}{}^{\oplus s}.$$

Dans le reste de l'article on abrégera $\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M}}(\mathrm{dlog}\,\infty_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M}})$ en $\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$.

Remarque 6.5. La canonicité des isomorphismes de (vi) montre en particulier que les faisceaux $R^a\overline{f_s}_* \bigwedge^b \Omega^1_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$ sont :

1) indépendants du choix de la compactification toroïdale de $\mathcal{A}^s$ choisie,

2) munis d'une action naturelle de $\mathfrak{G}^s$ et de $\mathfrak{o}$,

3) localement libres sur $\mathcal{O}_{\overline{M}}\otimes\mathfrak{o}$.

Démonstration du théorème. On construit $P = \overline{\mathcal{A}^s}$ en suivant les étapes de [11] VI.1 : Pour chaque $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ la projection de $\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ sur $\Sigma^{\mathcal{C}}$ nous donne un morphisme d'immersions toroïdales (voir [23]) :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S}_{\mathcal{C}} & \hookrightarrow & \widetilde{S}_{\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{\mathcal{C}} & \hookrightarrow & S_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \end{array}$$

où $S_{\mathcal{C}}$ (resp. $\widetilde{S}_{\mathcal{C}}$) désigne le tore déployé de groupe des caractères X (resp. $X\times\mathfrak{a}^s$). Le morphisme $\widetilde{S}_{\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}} \to S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ est équivariant pour l'action des tores $\widetilde{S}_{\mathcal{C}} \to S_{\mathcal{C}}$ et pour l'action des groupes $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times \to \mathfrak{o}^\times$.

Il est crucial de noter alors que :

– la fonction de polarisation $\varphi : \widetilde{C}_+ \to \mathbb{Z}$ induit un faisceau inversible relativement ample $\mathcal{L}$ sur $S_{\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}}$ (voir [23]).

– le fait que φ est k-tordue nous donne, pour tout $\beta\in\mathfrak{b}^s$ et tout point g de $\widetilde{G}^s = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*)^s$ la relation

$$S_g^* T_\beta^* = \mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(g)^{2k} T_\beta^* S_g^*,$$

qui est similaire à celle imposée en plus dans la définition des modèles relativement complets (voir [28]2.1(iv)).

– pour tout $\sigma\in\Sigma^{\mathcal{C}}$ le pull-back de $(\widetilde{S}_{\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}},\mathcal{L})$ par le morphisme $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma} \to S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ est un modèle relativement complet faible polarisé du tore $\widetilde{G}^s\times\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}$, relativement à $(\mathfrak{b}^s, (\phi_{\mu_i})_{1\leq i\leq s})$.

Ainsi, par le résultat principal sur ces modèles [11] VI.1.10, on obtient un schéma propre P_σ sur $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]$, prolongeant le pull-back $\mathcal{A}^s_\sigma$ de la variété de Kuga–Sato universelle à $\overline{S}^0_{\mathcal{C},\sigma}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]$, et un faisceau inversible ample $\mathcal{L}_\sigma$ sur P_σ, prolongeant le faisceau inversible ample canonique $\otimes_i \mathrm{pr}_i^*\mathcal{L}_{\mu_i}$ de $\mathcal{A}^s_\sigma$.

Par compatibilité des immersions toriques, comme dans [11] IV.3 p. 104, on obtient un schéma propre

$$g_{\mathcal{C}} : P_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \to S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}],$$

appelé le “*bon modèle formel compact*” en la pointe $\mathcal{C}$, et un faisceau inversible ample $\mathcal{L}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ sur $P_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$. Le couple $(P_{\Sigma^{\mathcal{C}}}, \mathcal{L}_{\Sigma^{\mathcal{C}}})$ descend à $S^{\wedge}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}})$.

On peut alors algébriser et recoller ces schémas, ainsi que les faisceaux inversibles amples, pour obtenir un morphisme $\overline{f} : P \to \overline{M}$ et un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur P, de sorte que :

1) $\overline{f}$ est projectif sur $\overline{M}$,

2) on a canoniquement $P|_M \cong \mathcal{A}^s$,

3) le schéma semi-abélien $\mathfrak{G}^s$ agit sur P en prolongeant l'action par translation de $\mathcal{A}^s$ sur lui-même au-dessus de M,

4) si pour tout $\mathcal{C}$, $\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ contient les $\sigma \times \{0\}$ pour tout $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, le schéma $\mathfrak{G}^s$ est muni d'une immersion ouverte $j : \mathfrak{G}^s \hookrightarrow P$ d'image dense dans P, et le faisceau $j^*\mathcal{L}$ coïncide avec le faisceau ample canonique sur $\mathfrak{G}^s$ associé à $(\mu_1, \ldots, \mu_s)$, via la $\mathfrak{c}$-polarisation canonique sur le schéma semi-abélien $\mathfrak{G}^s$ prolongeant celle de $\mathcal{A}^s$.

5) Pour tout cône $\tau \in \widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ et $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, avec $\mathrm{pr}_1(\tau) = \sigma$, la complétion formelle de $P \to \overline{M}$ le long de la τ-strate (au-dessus de la σ-strate de $\overline{M}$) s'identifie, localement pour la topologie étale, au morphisme d'immersion toriques

$$\widetilde{S}_{\mathcal{C},\tau} \to S_{\mathcal{C},\sigma}.$$

Remarque 6.6. 1) Le qualificatif “faible” fait référence au fait que la construction de P à partir de $\widetilde{G}$, bien que du type de celle de Mumford (complétion, quotient par les périodes, puis algébrisation), ne suppose pas que le schéma $\widetilde{P}$ associé au tore déployé $\widetilde{G}$ contienne ce tore, (on a encore cependant $\widetilde{G}_\eta = \widetilde{P}_\eta$).

2) $j : \mathfrak{G}^s \hookrightarrow P$ n'est pas une immersion toroïdale au-dessus de $\overline{M}$.

On pose $\overline{\mathcal{A}^s} = P$. Il reste à vérifier les énoncés (v) et (vi) du théorème. A partir de $j : \mathfrak{G}^s \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}^s}$, on obtient $j^* : \Omega^1_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M}}(\mathrm{dlog}\,\infty) \to \Omega^1_{\mathfrak{G}^s/\overline{M}}$ qui induit un isomorphisme sur $\overline{f_s}^* e^*\Omega^1_{\mathfrak{G}^s/\overline{M}} = \overline{f_s}^*(\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M}}{}^{\oplus s})$, d'où le (v).

Le (vi) se déduit à partir du (v) et du cup-produit

$$\bigwedge^a R^1\overline{f_s}_*\left(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}^s}}\right) \to R^a\overline{f_s}_*(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}^s}}) \tag{7}$$

Pour montrer que cette flèche est un isomorphisme on se ramène d'abord par complétion aux bons modèles formels compacts (voir VI.1.11 de [11]), qui permettent de remplacer le morphisme $\overline{f_s} : \overline{\mathcal{A}^s} \to \overline{M}$ par les morphismes d'immersions toriques

$$g : \widetilde{S}_{\mathcal{C},\tau} \to S_{\mathcal{C},\sigma}.$$

On exploite alors l'action de $\widetilde{G}$ sur $R^a g_*(\mathcal{O}_{\widetilde{S}_{\mathcal{C},\tau}})$ qui permet de calculer la cohomologie des immersions toriques comme au bas de la page 208 de [11]. □

Les points (v) et (vi) du théorème précédent sont en partie conséquence du fait plus général suivant que le complexe $R\overline{f}_*\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$ ne dépend pas du choix de la compactification toroïdale $\overline{\mathcal{A}}$ (voir le lemme VI.3.4 de [11] qui se transpose sans changement à notre cas). On en déduit en particulier que le fibré $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ ne dépend pas du choix de la compactification toroïdale $\overline{\mathcal{A}}$ au-dessus de $\overline{M}$ et qu'il est muni d'une action de $\mathfrak{o}$. En fait, si on pose $j_M : M \hookrightarrow \overline{M}$, alors $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ s'identifie au sous-faisceau de $j_{M*}\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{A}/M)$ des sections $\mathfrak{G}$-invariantes de $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{G}/\overline{M})$.

La suite spectrale de Hodge vers de Rham logarithmique fournit une suite exacte courte

$$0 \to \overline{f}_*\Omega_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \to \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} \to R^1\overline{f}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}} \to 0$$

qui est, elle-aussi, indépendante de $\overline{\mathcal{A}}$. La filtration de Hodge sur $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ est donc indépendante de $\overline{\mathcal{A}}$. On a la première partie de la

Proposition 6.7. *Étant donné un Γ-éventail complet Σ de C_+, le fibré $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ ne dépend pas du choix de la compactification toroïdale $\overline{\mathcal{A}}$ au-dessus de $\overline{M}$; il en est de même pour sa filtration de Hodge et pour sa connexion logarithmique prolongeant la connexion de Gauss–Manin. Il est muni d'une action naturelle de $\mathfrak{G}$ et de $\mathfrak{o}$. La connexion de Gauss–Manin logarithmique est compatible avec la flèche de Kodaira–Spencer*

$$\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M}} \to (\underline{\omega}^\vee_{\mathfrak{G}/\overline{M}} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}) \otimes \Omega_{\overline{M}}(\mathrm{dlog}\ \infty).$$

Démonstration. On démontre que la connexion de Gauss–Manin possède un prolongement indépendant de $\overline{\mathcal{A}}$ et que ce prolongement est unique. Pour une compactification donnée $\overline{\mathcal{A}}$, on peut définir la connexion de Gauss–Manin logarithmique (voir la section 2 de [22] dans le cas non-logarithmique) comme suit. Posons $\mathrm{Fil}^i\ \Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathrm{dlog}\ \infty) = \mathrm{im}(\overline{f}^*\Omega^i_{\overline{M}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \otimes \Omega^{\bullet - i}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \to \Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathrm{dlog}\ \infty))$ et considérons la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{Fil}^1 / \mathrm{Fil}^2 \to \mathrm{Fil}^0 / \mathrm{Fil}^2 \to \mathrm{Fil}^0 / \mathrm{Fil}^1 \to 0 \tag{8}$$

La connexion de Gauss–Manin s'identifie alors au morphisme connectant

$$R^1\overline{f}_*\,\mathrm{gr}^0 \to R^2\overline{f}_*\,\mathrm{gr}^1 .$$

Si l'on pose $\mathrm{Fil}^i_{\mathfrak{G}} = \mathrm{Fil}^i\ \Omega^\bullet_{\mathfrak{G}}(\mathrm{dlog}\ \infty) = \mathrm{im}(\overline{f}^*\Omega^i_{\overline{M}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \otimes \Omega^{\bullet - i}_{\mathfrak{G}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \to \Omega^\bullet_{\mathfrak{G}}(\mathrm{dlog}\ \infty))$, où le dlog ∞ n'est relatif qu'aux pôles le long du diviseur vertical $\overline{f}^*\infty$ de $\mathfrak{G}$, on peut identifier (8) à la sous-suite (exacte) des $\mathfrak{G}$-invariants de

$$0 \to \mathrm{Fil}^1_{\mathfrak{G}} / \mathrm{Fil}^2_{\mathfrak{G}} \to \mathrm{Fil}^0_{\mathfrak{G}} / \mathrm{Fil}^2_{\mathfrak{G}} \to \mathrm{Fil}^0_{\mathfrak{G}} / \mathrm{Fil}^1_{\mathfrak{G}} \to 0,$$

qui ne dépend pas de $\overline{\mathcal{A}}$. Encore une fois, ceci résulte de ce que la connexion de Gauss–Manin sur $\mathcal{A}$ est $\mathcal{A}$-invariante ; elle se prolonge donc localement de façon unique via l'identification $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{G}/\overline{M})^{\mathfrak{G}}$. □

7 Applications de la compactification toroïdale arithmétique

Irréductibilité du schéma $M \otimes \mathbb{F}_p$ ($p \nmid \Delta$). Le schéma M est géométriquement irréductible sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$. Il en est de même pour le $\mathcal{T}_1$-torseur $\mathfrak{M}$ sur M.

La démonstration est la même que dans [11] IV.5.10 : la fibre générique de M est géométriquement connexe par la description transcendante de M^{an} et le principe GAGA ;

il en est de même pour la fibre générique d'une compactification toroïdale $\overline{M}$. Soit a : $\overline{M} \to S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])$ le morphisme structural. Ce morphisme est lisse donc plat. Il est propre donc $a_*\mathcal{O}_{\overline{M}}$ est un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-module de type fini. Par platitude, ce module est libre de rang r. En passant à la fibre générique, on voit que $r = 1$ parce que cette fibre est connexe (et propre). Le Théorème de Connexité de Zariski montre que la condition $a_*\mathcal{O}_{\overline{M}} = \mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ entraîne la connexité des fibres $\overline{M} \otimes \mathbb{F}_p$ ($p \nmid \Delta$). La lissité de $\overline{M} \otimes \mathbb{F}_p$ entraîne alors l'irréductibilité géométrique de $M \otimes \mathbb{F}_p$.

Prolongement des fibrés automorphes. On peut reprendre la construction de fibrés automorphes de la partie 4 à l'aide de torseurs sur $\overline{M}$. Dans ce paragraphe on se place au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$.

On commence par le cas de $\overline{M^1}$. Fixons un éventail Γ-admissible lisse $(\Sigma^{\mathfrak{C}})_{\mathfrak{C}}$ et une compactification toroïdale $\overline{M^1} = M^1_\Sigma$. Soit $\overline{f} : \mathfrak{G} \to \overline{M^1}$ le schéma semi-abélien construit sur $\overline{M^1}$. Rappelons que l'on pose $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} = \overline{e}^*\Omega_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$, où $\overline{e} : \overline{M^1} \to \mathfrak{G}$ désigne la section unité. On a $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} \cong \mathcal{O}_{\overline{M^1}} \otimes \mathfrak{o}$ localement pour la topologie de Zariski (voir [7]).

Alors $\overline{\mathfrak{M}^1} := \mathrm{Isom}_{\overline{M^1}}\left(\mathcal{O}_{\overline{M^1}} \otimes \mathfrak{o}, \underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}\right)$ est un $\mathcal{T}_1$-torseur de Zariski sur $\overline{M^1}$.

Un point de $\overline{\mathfrak{M}^1}$ est un couple (x, ω) constitué d'un point $x \in \overline{M^1}$, et d'une $(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{\overline{M^1}})$-base ω de $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$.

Comme dans la partie 4, le $\mathfrak{o}$-fibré inversible $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ descend en un $\mathfrak{o}$-fibré inversible sur $\overline{M}$, noté encore $\underline{\omega}$. Alors le $\mathcal{T}_1$-torseur de Zariski

$$\overline{\mathfrak{M}} = \mathrm{Isom}_{\overline{M}}\left(\mathcal{O}_{\overline{M}} \otimes \mathfrak{o}, \underline{\omega}\right)$$

prolonge le $\mathcal{T}_1$-torseur $\mathfrak{M}$ sur M, défini dans la partie 4.

Soit $\mathcal{O}'$ l'anneau des entiers de $F^{\mathrm{gal}}(\sqrt{\epsilon}, \epsilon \in \mathfrak{o}^\times_{D+})$.

Pour tout $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-schéma Y, on pose $Y' = Y \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}])$.

On a un foncteur $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{T}_1}$ des représentations algébriques du $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes $\mathcal{T}_1'$, vers les fibrés décomposables en fibrés inversibles sur $\overline{M}'$, qui à W associe le produit contracté $\overline{\mathfrak{M}}' \overset{\mathcal{T}_1'}{\times} W =: \overline{\mathcal{W}}$

Si W_{st} est la représentation standard de $\mathcal{T}_1'$ (i.e. $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$ avec action de $\mathfrak{o}^\times$), on a $\overline{\mathcal{W}}_{\mathrm{st}} = \underline{\omega}^\vee$. Pour tout caractère κ, vu comme $\mathcal{O}'$-représentation de $\mathcal{T}_1'$, on obtient le prolongement canonique de $\underline{\omega}^\kappa = \mathcal{W}_{1,-\kappa}$ à $\overline{M}$, comme $\overline{\mathfrak{M}}' \overset{\mathcal{T}_1'}{\times} \mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}](-\kappa)$.

Pour alléger les notations, on note encore $\underline{\omega}^\kappa$ le prolongement canonique de $\underline{\omega}^\kappa$ à $\overline{M}$.

Principe de Koecher. Dans toute cette partie on suppose $F \neq \mathbb{Q}$. Pour tout poids $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$ et pour toute $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre R contenant les valeurs de κ, on a :

Théorème 7.1 (Principe de Koecher [30] 4.9).

$$\Gamma\left(M \times \mathrm{Spec}(R), \underline{\omega}^\kappa\right) = \Gamma\left(\overline{M} \times \mathrm{Spec}(R), \underline{\omega}^\kappa\right)$$

Démonstration. Il suffit de vérifier l'holomorphie d'une section globale de $\underline{\omega}^\kappa$ le long du diviseur à l'infini de $\overline{M}$. Il suffit donc de montrer que pour toute $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathfrak{C}$, les sections globales méromorphes du pull-back de $\underline{\omega}^\kappa$ sur $S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}} \times \mathrm{Spec}(R)$ qui sont $\mathfrak{o}^\times_\mathcal{C}$-invariantes sont holomorphes. Le pull-back $\underline{\omega}_\mathcal{C}$ de $\underline{\omega}$ sur $S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}} \times \mathrm{Spec}(R)$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}}} \otimes R$. On peut donc identifier une section méromorphe de $\underline{\omega}_\mathcal{C}$ à une série $f_\mathcal{C} = \sum_{\xi \in X} a_\xi q^\xi$, telle que pour tout $(u,\epsilon) \in \mathfrak{o}^\times_\mathcal{C}$ d'après (5) on a $a_{u^2\epsilon\xi} = u^\kappa e^{2i\pi\, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u \xi^*_{u,\epsilon})} a_\xi$. Supposons que $f_\mathcal{C}$ ne soit pas holomorphe. Il existe donc ξ_0 non totalement positif tel que $a_{\xi_0} \neq 0$. C'est donc qu'il existe $\xi^*_0 \in X^*_{\mathbb{R}+}$ avec $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi_0\xi^*_0)$ strictement négatif. Comme $F \neq \mathbb{Q}$, on peut choisir des unités $(u,\epsilon) \in \mathfrak{o}^\times_\mathcal{C}$ de manière à rendre la quantité $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(u^2\epsilon\xi_0\xi^*_0)$ arbitrairement proche de $-\infty$. Soit σ un cône polyédral de $\Sigma^\mathcal{C}$ contenant ξ^*_0. Par définition de $S^\wedge_\sigma$, on voit que $f_\mathcal{C}$ n'est pas méromorphe sur $S^\wedge_\sigma$, ce qui est absurde. □

***q*-développement.** Pour alléger les notations on se cantonne au cas des pointes non-ramifiées. Voir la partie 8 de [7] pour le cas général. Soit $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$ et soit R une $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre, où $\mathcal{O}'$ désigne l'anneau des entiers d'une clôture galoisienne de F. Soit $\mathcal{C}$ une $(R,\mathfrak{n})$-pointe uniformisée non ramifiée ; posons

$$R^{(\kappa)}_\mathcal{C}(R) := \Big\{ \sum_{\xi \in X_+ \cup \{0\}} a_\xi q^\xi \;\Big|\; a_\xi \in R,\ a_{u^2\epsilon\xi} = \epsilon^{\kappa/2} u^\kappa a_\xi,\ \ \forall (u,\epsilon) \in \mathfrak{o}^\times_\mathcal{C} \Big\}$$

Comme le pull-back $\underline{\omega}_\mathcal{C}$ de $\underline{\omega}$ sur $S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}} \times \mathrm{Spec}(R)$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}}} \otimes R$, on a

$$\underline{\omega}^\kappa_\mathcal{C} = \big(\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}}} \otimes R\big)^{-\kappa}$$

Or $\big(\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}}} \otimes R\big)^{-\kappa} = \big(\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}'\big)^{-\kappa} \otimes_{\mathcal{O}'} \big(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}}} \otimes R\big)^{-\kappa}$.

Notons que $R^{(\kappa)}_\mathcal{C}(R) = \big(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}}} \otimes R\big)^{-\kappa}$ est un $\mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^\mathcal{C}}} \otimes R$-module inversible et $\mathfrak{a}^{(\kappa)} := (\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}')^{-\kappa}$ est un $\mathcal{O}'$-module inversible.

On peut donc associer à toute forme modulaire de Hilbert f de poids κ, niveau Γ définie sur R, un élément $f_\mathcal{C} \in \mathfrak{a}^{(\kappa)} \otimes_{\mathcal{O}'} R^{(\kappa)}_\mathcal{C}(R)$.

Définition 7.2. La série $f_\mathcal{C}$ est appelée le q-développement de la forme f en la pointe $\mathcal{C}$. On note $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},\kappa}$ l'application $f \mapsto f_\mathcal{C}$.

Le principe du q-développement en une pointe $\mathcal{C}$ non-ramifiée s'énonce alors :

Proposition 7.3. *Pour toute $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre R,*

1) *l'application*

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{C},\kappa} : G_\kappa(\mathfrak{c},\mathfrak{n};\, R) \to \mathfrak{a}^{(\kappa)} \otimes_{\mathcal{O}'} R^{(\kappa)}_\mathcal{C}(R)$$

est injective,

2) *pour toute inclusion $R \subset R'$ d'algèbres, si $f \in G_\kappa(\mathfrak{c},\mathfrak{n};\, R')$ et $f_\mathcal{C} \in \mathfrak{a}^{(\kappa)} \otimes_{\mathcal{O}'} R^{(\kappa)}_\mathcal{C}(R)$, alors $f \in G_\kappa(\mathfrak{c},\mathfrak{n};\, R)$.*

L'énoncé 2) dans le cas de l'anneau nul $R = 0$ redonne 1).

Démonstration. Les deux énoncés résultent du suivant : soit R un groupe abélien ; l'application $f \mapsto f_{\mathcal{C}}$:

$$\mathrm{H}^0(\overline{M}, \underline{\omega}^\kappa \otimes R) \to \mathfrak{a}^{(\kappa)} \otimes R[[q^\xi; \xi \in X_+ \cup \{0\}]]$$

est injective (on utilise le principe de Koecher pour passer à $\overline{M}$).

Par commutation des deux membres aux limites inductives, on se ramène aisément au cas $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}/r\,\mathbb{Z}$. Par l'irréductibilité géométrique de $\mathfrak{M}$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$, une section globale s de $\underline{\omega}^\kappa$ sur $\overline{M} \otimes \mathbb{Z}/r\,\mathbb{Z}$ est nulle, si et seulement si son pull-back à la complétion de $\overline{M} \otimes \mathbb{Z}/r\,\mathbb{Z}$ le long d'un diviseur est nul. Soit $\mathcal{C}$ une pointe ; $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$ s'identifie à la complétion de M_Σ le long de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$. Il suffit donc que le pull-back de s à $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$ soit nul. C'est-à-dire que $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},\kappa}(s)$ soit nul. □

Remarque 7.4. 1) L'application $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}$ somme des $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},\kappa}$

$$G(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) = \bigoplus_{\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]} G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) \to R \otimes \mathbb{Z}[[q^\xi; \xi \in X_+ \cup \{0\}]]$$

n'est pas injective en général comme le montre l'exemple de $F = \mathbb{Q}$, $R = \mathbb{F}_p$, $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: le noyau de $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}$

$$\bigoplus_{\kappa \in \mathbb{Z}} G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; \mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p[[q]]$$

est l'idéal engendré par $E_{p-1} - 1$.

2) Pour F totalement réel quelconque, le noyau de la flèche $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{F}_p$ à été calculée par Goren (voir [13] Chap.5, Corollaire 4.5).

3) En fait, si R est une $\mathbb{Z}$-algèbre sans torsion, $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}$ est injective grâce au théorème de Dedekind d'indépendance linéaire des caractères distincts.

Prolongement de fibrés filtrés et à connexions. Fixons un éventail admissible principalement polarisé $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\phi})$ pour $\mathcal{A}$ au-dessus de l'éventail admissible $\Sigma = (\Sigma^{\mathcal{C}})$ fixé pour M^1 ; on a ainsi un morphisme de compactifications toroïdales $\overline{f} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{M^1}$ prolongeant $f : \mathcal{A} \to M^1$.

Dans ce qui suit, on posera pour abréger $\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty) = \Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}})$ et $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = R^1\overline{f}_*\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$. Ce dernier faisceau est localement libre de rang 2 sur $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{\overline{M^1}}$. En outre, il est muni d'une filtration à deux crans donnée par la suite spectrale de Hodge vers de Rham :

$$0 \to \overline{f}_*\Omega_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty) \to \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} \to R^1\overline{f}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}} \to 0$$

Par le théorème 6.4(vi), on a des isomorphismes canoniques de faisceaux

$$\overline{f}_*\Omega_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty) \cong \underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} \text{ et } R^1\overline{f}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}} \cong \underline{\omega}^\vee_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} \otimes \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}.$$

La filtration de $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ se réécrit donc $\mathrm{Fil}^0\,\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$, $\mathrm{Fil}^1\,\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = \underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ et $\mathrm{gr}^0\,\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = \underline{\omega}^\vee_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} \otimes \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$.

Comme dans la partie 4 le fibré $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ descend en un fibré sur $\overline{M}$ jouissant aux mêmes propriétés.

On définit un $\mathcal{D}$-torseur $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{D}} = \mathrm{Isom}^{\mathcal{D}}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}}\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$ au-dessus de $\overline{M}$, dont les S-points sont ceux de $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}}\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$ induisant via λ un élément de $\mathcal{D}(\mathcal{O}_S)$ dans $(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_S)^\times$.

On définit un $\mathcal{B}$-torseur $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{B}} \overset{\mathcal{B}}{\to} \overline{M}$ comme le produit fibré de $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{D}}$ et de $\mathrm{Isom}^{\mathrm{fil}}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_M}((\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_M)^2, \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$ au-dessus de $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}}\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$.

Il définit un foncteur $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{B}'}$ de la catégorie des représentations algébriques du $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes $\mathcal{B}'$ vers celle des fibrés sur $\overline{M}'$ qui sont des extensions successives de fibrés inversibles. Le foncteur est donné par $V \mapsto \overline{\mathcal{V}} := \overline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{B}'} \overset{\mathcal{B}'}{\times} V$.

Si $V_{\mathrm{st}} = \left(\mathfrak{o}[\frac{1}{\Delta}]\right)^2$ est la représentation standard de $\mathcal{B}$, on a $\overline{\mathcal{V}}_{\mathrm{st}} = \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$.

Définition 7.5. Pour tout poids algébrique κ et $n, m \in \mathbb{Z}[J_F]$ comme dans la définition 2.12, on note $\overline{\mathcal{V}}_n$ et $\overline{\mathcal{W}}_{n,c}$ les prolongements à $\overline{M}'$ construits à l'aide de $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{B}'}$ des fibrés $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{W}_{n,c}$ des définitions 4.9 et 4.10.

Remarque 7.6. 1) Pour toute $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$-représentation algébrique V de $\mathcal{B}'$, le fibré $\overline{\mathcal{V}}$ est le prolongement de Mumford de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire que son pull-back à toute carte locale donnée par une immersion torique $S_{\mathcal{C}} \overset{j}{\hookrightarrow} S_{\mathcal{C},\sigma^{\mathcal{C}}_\alpha}$ est engendré par les sections $S_{\mathcal{C}}$-invariantes de $j_*\mathcal{V}$. En effet, c'est vrai pour $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ par la proposition 6.7 et donc pour tout les fibrés obtenus par pléthysme à partir de $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$. Ceci implique par exemple, que pour tout un poids algébrique κ et $m, n \in \mathbb{Z}[J_F]$, comme dans la définitions 2.12, le foncteur $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{B}'}$ fournit sur $\mathbb{C}$ (sur $\mathbb{Q}$ ou sur $\mathbb{Q}_p$) le prolongement de Mumford de $\mathrm{Sym}^n\, \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \otimes (\wedge^2 \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})^{\otimes m}$ et de $\underline{\omega}^\kappa$.

2) Rappelons que sur une clôture galoisienne F^{gal} de F, on a en posant

$$\mathcal{H}^1_{dR,\tau,F^{\mathrm{gal}}} = \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \otimes_{F,\tau} F^{\mathrm{gal}}, \quad \underline{\omega}^\tau = \underline{\omega} \otimes_{F,\tau} F^{\mathrm{gal}},$$

$$\mathrm{Sym}^n\, \mathcal{H}^1_{dR,F^{\mathrm{gal}}} = \bigotimes_\tau \mathrm{Sym}^{n_\tau}\, \mathcal{H}^1_{dR,\tau,F^{\mathrm{gal}}}, \text{ et } \underline{\omega}^\kappa = \bigotimes_\tau \mathrm{Sym}^{k_\tau}_{F^{\mathrm{gal}}}\, \underline{\omega}^\tau.$$

3) Soit p premier ne divisant pas Δ. Le foncteur $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{B}}$ ne donne le prolongement de Mumford des faisceaux $R^s f_* \Omega^\bullet_{\mathcal{A}/M}$ sur $\overline{M} \otimes \mathbb{Z}_p$ que lorsque $s < p$. En effet, pour tout $s < p$, Illusie [**?**] a montré que $R^s \overline{f} \Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M}}(\mathrm{dlog}\, \infty)$ est libre sur $(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}})$. Il en résulte que le foncteur $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{B}'}$ fournit le prolongement de Mumford de $M \otimes \mathbb{Z}_p$ à $\overline{M} \otimes \mathbb{Z}_p$ des faisceaux $\mathrm{Sym}^n\, \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \otimes (\wedge^2 \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})^{\otimes m}$ lorsque $p - 1 > \sum_\tau (n_\tau + 1)$.

On définit de plus un G-torseur de Zariski :

$$\mathfrak{M}_\nabla = \mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}}}(L_0 \otimes \mathcal{O}_{\overline{M}}, \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$$

On définit ainsi un foncteur de la catégorie des représentations algébriques de G sur $\mathcal{O}'[\frac{1}{\Delta}]$ vers celle des fibrés sur $\overline{M}'$ munis d'une connexion intégrable à singularités logarithmique et dont la réduction modulo p est quasi-nilpotente en chaque $p \nmid \Delta$ (voir [27] Sect.5.2). On observera d'ailleurs que l'utilisation du torseur $\mathfrak{M}_\nabla$ défini ici aurait simplifié substantiellement la présentation de la partie 5.2 citée en rendant la partie 5.2.3 inutile.

Définition 7.7. Pour tout poids algébrique κ et $n, m \in \mathbb{Z}[J_F]$ comme dans la définition 2.12, on note $\overline{\mathcal{V}}_n^\nabla$ le prolongement à $\overline{M}'$ du fibré $\mathcal{V}_n^\nabla$ construit dans la définition 4.11.

Décomposition de Hodge–Tate de $\mathrm{H}^\bullet(M \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{V})$. Dans cette section, nous ne considérons que la filtration de Hodge dite aussi F-filtration (et son gradué associé). C'est-à-dire que la filtration par le poids dont les gradués sont purs est ici ignorée : les gradués que nous faisons apparaître sont encore munis d'une filtration par le poids.

Sur $\mathbb{C}$. Nous remercions H. Hida pour avoir attiré notre attention sur le point de vue transcendant suivant. Soit V une $\mathbb{Q}$-représentation de G, de système local sur M^{an} associé $\mathbb{V}$. On a $\mathrm{GL}_2(F \otimes \mathbb{R})/(F \otimes \mathbb{R})^\times \mathrm{O}_2(F \otimes \mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(F \otimes \mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(F \otimes \mathbb{R})$. Par cette identification on voit que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot z = -\overline{z}$;

Le groupe de Weyl de G, $W = \mathrm{O}_2(F \otimes \mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(F \otimes \mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}^{J_F}$ agit donc sur $(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V})$: si $\epsilon_J = (-1_J, 1_{\overline{J}}) \in W$ et $z = (z_J, z_{\overline{J}}) \in \mathfrak{H}_F$, $\epsilon_J \cdot (z, v) = ((-\overline{z}_J, z_{\overline{J}}), v)$.

Sur $\mathrm{H}^\bullet(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_\mathbb{C}) = \mathrm{H}^\bullet(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}) \otimes \mathbb{C}$, on a donc l'action de W d'une part et celle de la conjugaison complexe c sur les coefficients de l'autre. Soit $\epsilon_\tau = (-1_\tau, 1^\tau) \in W$. On décompose en espaces propres pour l'action des $\epsilon_\tau \otimes c$:

$$\mathrm{H}^\bullet(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_\mathbb{C}) = \bigoplus_{J \subset J_F} \mathrm{H}^{J,\overline{J}}(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_\mathbb{C})$$

où, en notant χ_J la fonction caractéristique d'une partie J de J_F, on a

$$\mathrm{H}^{J,\overline{J}}(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_\mathbb{C}) = \{x ; (\epsilon_\tau \otimes c)(x) = (-1)^{\chi_{\overline{J}}(\tau)} x\}$$

Cette décomposition est plus fine que la décomposition donnée par la filtration bête : pour tout entier a tel que $0 \leq a \leq d$, on a

$$\mathrm{gr}^a_{\text{bête}}\, \mathrm{H}^d(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_\mathbb{C}) = \bigoplus_{J \subset J_F, \mathrm{card}(J) = a} \mathrm{H}^{J,\overline{J}}(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_\mathbb{C})$$

Si $F = \mathbb{Q}$, $J_\mathbb{Q} = \{\mathrm{id}_\mathbb{Q}\}$ et $V = \mathbb{Q}$, la décomposition de Hodge de $\mathrm{H}^1(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$ en $\mathrm{H}^{J_\mathbb{Q},\emptyset}(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^{1,0} \cong \mathrm{H}^0(M^{\mathrm{an}\,*}, \Omega_{M^{\mathrm{an}}}(\mathrm{dlog}\,\infty))$ et $\mathrm{H}^{\emptyset, J_\mathbb{Q}}(M^{\mathrm{an}\,*}, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^{0,1} \cong \mathrm{H}^1(M^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_M^{\mathrm{an}})$, où $M^{\mathrm{an}\,*}$ désigne la compactification toroïdale, qui coïncide ici avec la compactification de Satake.

On voit à l'isomorphisme d'Eichler–Shimura, on voit que la partie Eisenstein du H^1 est concentrée dans le $\mathrm{H}^{1,0}$.

Cette décomposition de nature transcendante a un parallèle algébrique semblable au Th.5.5 Chap.VI de [11]. La simplicité de l'écriture ci-dessus vient de ce que le groupe dérivé de $G(\mathbb{R})$ est un produit de copies de SL_2.

Sur $\mathbb{Q}_p$. Soit p un nombre premier et V_n la $\mathbb{Q}_p$-représentation algébrique de G définie dans (6). On peut lui associer un faisceau lisse $\mathbb{V}_n$ sur $M^1\otimes\mathbb{Q}$ et des fibrés $\overline{\mathcal{V}}_n$ (resp. $\overline{\mathcal{V}}_n^{\nabla}$) sur $\overline{M^1}\otimes\mathbb{Q}_p$ qui sont filtrés (resp. à connexion à singularités logarithmiques intégrable et quasi-nilpotente).

La démonstration de la dégénérescence des suites spectrales des Th.5.5 et 6.2 du Chapitre VI de [11] dont les termes E_1 sont donnés en termes du complexe de Bernstein–Gelfand–Gelfand (dualisé et faisceautisé) s'adapte au cas de la variété de Hilbert. Il est important de noter que c'est la démonstration de ce théorème qui requiert l'utilisation des compactifications toroïdales de toutes les puissances de la variété de Kuga–Sato et pas seulement de la puissance première. En effet, par un théorème de Deligne [5] Sect. 3.2, la suite spectrale de Hodge vers de Rham

$$\mathrm{E}_1^{i,j}=\mathrm{H}^j(\overline{\mathcal{A}^s},\Omega^i_{\overline{\mathcal{A}^s}}(\mathrm{dlog}\ \infty))\Rightarrow\mathrm{H}^{i+j}(\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}}(\mathrm{dlog}\ \infty))$$

dégénère en E_1. On en déduit comme dans [11] p. 234 la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale

$$\mathrm{E}_1^{i,j}=\mathrm{H}^{i+j}(\overline{M^1},\mathrm{gr}^i_F(R^sf_{s*}\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)\otimes\Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathrm{H}^{i+j}(R^sf_{s*}\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)\otimes\Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)),$$

où la F-filtration est obtenue en faisant le produit tensoriel des deux filtrations de Hodge. En prenant $s=n_0d$, le fibré $\overline{\mathcal{V}}_n$ est par pléthysme (voir [27] Appendice II) un facteur direct de $(R^1f_*\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty))^{\otimes s}$ qui, par la formule de Künneth, est lui-même un facteur direct de $R^sf_{s*}\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)$. On en déduit la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Hodge vers de Rham

$$\mathrm{E}_1^{i,j}=\mathrm{H}^{i+j}(\overline{M^1},\mathrm{gr}^i_F(\overline{\mathcal{V}}_n\otimes\Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)))\Rightarrow\mathrm{H}^{i+j}(\overline{M^1},\overline{\mathcal{V}}_n\otimes\Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)).$$

Par le Théorème de comparaison de Faltings [10], la $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-représentation $\mathrm{H}^\bullet(M^1\otimes\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{V}_n)$ est de de Rham et pour toute compactification toroïdale $\overline{f}:\overline{\mathcal{A}}\to\overline{M^1}$ de $f:\mathcal{A}\to M^1$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^\bullet(M^1\otimes\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{V}_n)\otimes B_{\mathrm{dR}}\cong\mathrm{H}^\bullet(\overline{M^1},\overline{\mathcal{V}}_n\otimes\Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty))\otimes B_{\mathrm{dR}}.$$

Les poids de Hodge–Tate de $\mathrm{H}^\bullet(M^1\otimes\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{V}_n)$ sont donc donnés par les sauts de la filtration de Hodge sur $\mathrm{H}^\bullet(\overline{M^1},\overline{\mathcal{V}}_n\otimes\Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty))$ venant de la suite spectrale ci-dessus. Nous allons calculer ces derniers comme dans [11] Th.5.5 ou [27] à l'aide d'un sous-complexe facteur direct de $\overline{\mathcal{V}}_n\otimes\Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)$, appelé le complexe BGG. Avant d'énoncer le théorème nous allons introduire quelques notations.

On identifie l'ensemble des parties de J_F avec le groupe de Weyl W de G, en associant à $J\subset J_F$ l'élément $\epsilon_J=(-1_J,1_{\overline{J}})\in W$. Pour tout $J\subset J_F$ on pose $p(J)=\sum_{\tau\in J}(k_0-m_\tau-1)\tau+\sum_{\tau\in J_F\setminus J}m_\tau\tau$; de même, pour $a=\sum_{\tau\in J_F}a_\tau\tau\in\mathbb{Z}[J_F]$, on pose

$|a| = \sum_{\tau\in J_F} a_\tau \in \mathbb{Z}$. Le complexe BGG est défini comme :

$$\overline{\mathcal{K}}^i_n = \bigoplus_{J\subset J_F, |J|=i} \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0}.$$

Soit $H = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_\tau \right)_{\tau\in J_F} \in (\mathfrak{gl}_2)^{J_F}$. On a $-(\epsilon_J(n+t)-t, n_0)(H) = |p(J)|$; en effet le caractère de T correspondant à $(n; n_0)$ est donné par la formule $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto a^{(n_0t+n)/2} d^{(n_0t-n)/2}$. Ainsi pour tout $\tau \in J_F$ on a

$$-(\epsilon_\tau(n_\tau+1)-1; n_0)(H) = \begin{cases} \frac{n_0-n_\tau}{2} = m_\tau, \text{ si } \epsilon_\tau = 1 (\iff \tau \in \overline{J}), \\ \frac{n_0+n_\tau+2}{2} = k_0 - m_\tau - 1, \text{ si } \epsilon_\tau = -1 (\iff \tau \in J). \end{cases}$$

La F-filtration sur $\overline{\mathcal{K}}^\bullet_n$ est donnée par $\mathrm{Fil}^i\, \overline{\mathcal{K}}^\bullet_n = \bigoplus_{J\subset J_F, |p(J)|\geq i} \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0}$.

Théorème 7.8. (i) *On a un quasi-isomorphisme de complexes filtrés*

$$\overline{\mathcal{K}}^\bullet_n \hookrightarrow \overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty).$$

(ii) *La suite spectrale donnée par la F-filtration*

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{J\subset J_F, |p(J)|=i} \mathrm{H}^{i+j-|J|}(\overline{M^1}, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0}) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\overline{M^1}, \overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty))$$

dégénère en E_1.

(iii) *Pour tout entier j, $0 \leq j \leq d$, les poids de Hodge–Tate de la représentation p-adique $\mathrm{H}^j(M^1 \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{V}_n)$ appartiennent à l'ensemble $\{|p(J)|,\ |J| \leq j\}$.*

Ce théorème admet un corollaire, donnant des propriétés p-adiques des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de Hilbert. Prenons $G = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$ de sorte qu'on connaisse l'existence de ces représentations galoisiennes. Soit $f \in G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ une forme de Hilbert cuspidale pour $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$ propre pour tous les opérateurs de Hecke, primitive de poids algébrique κ (voir 2.12). Soit ρ_f la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ dans $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, associée à f et à un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit W_f la f-partie de $\mathrm{H}^d_!(M_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$. Soit $\widetilde{F}$ la clôture galoisienne de F dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Pour tout $\tau \in J_F$ on note f_τ le conjugué interne de f par τ. D'après un résultat de Brylinski et Labesse [2] les semi-simplifications des restrictions à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\widetilde{F})$ des représentations W_f et $\bigotimes_{\tau\in J_F} \rho_{f_\tau}$ sont isomorphes.

En prenant les invariants de la F-filtration de $\overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$ par le groupe de Galois du revêtement étale $\overline{M^1} \to \overline{M}$, on obtient une filtration sur le complexe $\overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$ sur $\overline{M}$, appelée encore F-filtration. De même, on définit le complexe BGG sur $\overline{M}$ en prenant les invariants du complexe BGG sur $\overline{M^1}$. La suite spectrale associée est donnée par invariants de la suite spectrale du Théorème 7.8 (ii). D'où la première assertion du

Corollaire 7.9. (i) *La suite spectrale donnée par la F-filtration*

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{J\subset J_F, |p(J)|=i} \mathrm{H}^{i+j-|J|}(\overline{M}, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0}) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\overline{M}, \overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M}}(\mathrm{dlog}\ \infty))$$

dégénère en E_1.

(ii) *Les poids de Hodge–Tate de W_f sont les entiers $|p(J)|$, $J \subset J_F$, comptés avec multiplicité.*

Démonstration. (ii) On a $\overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0} = \underline{\omega}^{-\epsilon_J(n+t)+t} \otimes \underline{\mathrm{Det}}^{p(J)}$.

Il résulte du théorème 7.8 (comme dans [11] Th.5.5 et [27] Sect.2.3) que les sauts de la filtration de Hodge figurent parmi les $|p(J)|$, $J \subset J_F$. De plus,

$$\mathrm{gr}^{|p(J)|}\,\mathrm{H}^d(\overline{M}, \overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M}}(\mathrm{dlog}\ \infty)) = \mathrm{H}^{d-|J|}(\overline{M}, \underline{\omega}^{-\epsilon_J(n+t)+t} \otimes \underline{\mathrm{Det}}^{p(J)}).$$

D'après [8] Cor.2.7 la suite spectrale est Hecke équivariante. Il suffit donc de voir que pour tout $J \subset J_F$, le $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel

$$\big(\mathrm{H}^{d-|J|}(\overline{M}, \underline{\omega}^{-\epsilon_J(n+t)+t} \otimes \underline{\mathrm{Det}}^{p(J)}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p\big)[f]$$

est de dimension 1.

Grâce à l'existence d'une structure $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnelle du complexe BGG sous-jacent aux complexes BGG sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et sur $\overline{\mathbb{C}}$, en prenant un plongement de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{C}$, on a un isomorphisme Hecke-équivariant

$$\mathrm{H}^{d-|J|}(\overline{M}, \underline{\omega}^{-\epsilon_J(n+t)+t} \otimes \underline{\mathrm{Det}}^{p(J)}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C} = \mathrm{H}^{J,\overline{J}}(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_{n,\mathbb{C}}).$$

Or, par l'isomorphisme d'Eichler–Shimura–Harder la f-partie $\mathrm{H}^{J,\overline{J}}(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_{n,\mathbb{C}})[f]$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$, pour tout $J \subset J_F$ (voir [18]). □

Remarque 7.10. 1) Le motif W_f est pur de poids $(k_0-1)d$. L'ensemble de ses poids de Hodge–Tate est stable par la symétrie $h \mapsto (k_0-1)d - h$, correspondant au passage au complémentaire $|p(J)| \mapsto |p(\overline{J})|$. Cette symétrie est induite par la dualité de Poincaré $W_f \times W_f \to \mathbb{Q}(-(k_0-1)d)$.

2) Si F est un corps quadratique et f une forme de Hilbert cuspidale propre de poids κ sur F. En notant τ le plongement non-trivial de F, on voit que les sauts de la filtration de Hodge de W_f sont $m_\tau, k_0 - m_\tau - 1, k_0 + m_\tau - 1, 2k_0 - m_\tau - 2$.

Sur $\mathbb{Z}_p$. On a également une version cristalline. Soit p un nombre premier ne divisant pas Δ et soit V un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini muni d'une action algébrique de G de plus haut poids $n \in \mathbb{N}[J_F]$. On suppose que $p - 1 > \sum_\tau (n_\tau + 1)$. Comme dans le paragraphe précédent, on peut associer à V

1) un faisceau lisse $\mathbb{V}$ sur $M^1 \otimes \mathbb{Q}_p$, et

2) un fibré $\overline{\mathcal{V}}$ sur $\overline{M^1} \otimes \mathbb{Z}_p$, filtré et à connexion logarithmique intégrable quasi-nilpotente.

Étant donnée des compactifications toroïdales $\overline{f} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{M^1}$, on a un un théorème de comparaison de Faltings [10] reliant $\mathrm{H}^\bullet(M^1 \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{V})$ et $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{log-cris}}(\overline{M^1}, \overline{\mathcal{V}})$.

Prenons pour V la représentation géométriquement irréductible de plus haut poids $n \geq 0$. Un analogue sur $\mathbb{F}_p$ de la suite spectrale du théorème 7.8 donne le théorème (voir [27] et [8] Sect.5)

Théorème 7.11. *Supposons que p ne divise pas Δ et que $p-1 > \sum_\tau (n_\tau+1)$. Alors pour tout j compris entre 0 et d, les poids de Hodge–Tate du module cristallin $\mathrm{H}^j(M \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{V}_n)$ sont les $|p(J)|$, où J parcourt l'ensemble des parties de J_F telles que $|J| \leq j$.*

8 Autres formes de Hilbert arithmétiques

Dans toute cette partie on suppose que $D = \mathbb{G}_\mathrm{m}$, c'est-à-dire $G = G^*$, de sorte que tous les sous-groupes de congruence considérés sont contenus dans $\mathrm{SL}_2(F)$, et en particulier $\Gamma = \Gamma^1$, $M^{\mathrm{an}} = M^{1,\mathrm{an}}$ et $M = M^1$.

Formes de Hilbert–Jacobi. Le but de ce paragraphe est de poser les définitions et les propriétés de base des formes modulaires de Hilbert–Jacobi arithmétiques. Le cas des formes de Siegel-Jacobi a déjà été traité par J. Kramer [25]. Nous donnons d'abord la définition des formes modulaires de Hilbert–Jacobi sur $\mathbb{C}$, inspirée de [9].

Dans le paragraphe sur la VAHB analytique universelle nous avons déjà considéré le groupe produit semi-direct $\Gamma^J = (\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \rtimes \Gamma$ (pour $\gamma \cdot (m,n) = (m,n)\gamma^{-1}$). Ce groupe agit à gauche sur $\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C})$ par :

$$\begin{cases} \gamma(z,v) = (\gamma(z), j(\gamma,z)^{-1}v) \\ (m,n)(z,v) = (z, v + m \otimes z + n \otimes 1) \end{cases} .$$

Soient $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F] = X(T)$ et $\mu \in \mathfrak{c} = X(\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{c}^*)$ et soit $e^\mu = \mu \circ q : F \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ la composée de l'application $q : F \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{c}^*$, définie dans (2), et du caractère μ. Pour chaque élément $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $(m,n) \in \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$ on définit une transformation linéaire de l'espace des fonctions holomorphes

$$f : \mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \text{ , } (z,v) \mapsto f(z,v),$$

en posant :

$$\begin{cases} (f|_{\kappa,\mu}\gamma)(z,v) = j(\gamma,z)^{-\kappa} e^\mu(-\frac{cv^2}{j(\gamma,z)}) f(\gamma(z,v)) \\ (f|_{\kappa,\mu}(m,n))(z,v) = e^\mu(m^2 z + 2mv) f((m,n)(z,v)) \end{cases} \tag{9}$$

Les relations suivantes :

(i) $(f|\gamma)|\gamma' = f|(\gamma\gamma')$, pour tout $\gamma, \gamma' \in \Gamma$,

(ii) $(f|(m,n))|(m',n') = f|(m+m', n+n')$, pour tout $m, m' \in \mathfrak{o}$et $n, n' \in \mathfrak{c}^*$,

(iii) $(f|(m,n))|\gamma = (f|\gamma)|((m,n)\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $m \in \mathfrak{o}$ et $n \in \mathfrak{c}^*$,

sont faciles à démontrer (le calcul révèle que (ii) et (iii) sont équivalentes respectivement à $e^\mu(2mn) = 1$ et $e^\mu(cdn^2 + abm^2 + 2bcmn) = 1$).

Une façon équivalente de formuler (i), (ii) et (iii) à la fois, est de dire que (9) définit une action du groupe produit semi-direct Γ^J sur les fonctions holomorphes sur $\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C})$.

Définition 8.1. Une forme modulaire de Hilbert–Jacobi de poids $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$, indice $\mu \in \mathfrak{c}$ et niveau Γ est une fonction holomorphe $f : \mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ vérifiant :

(i) $f|_{\kappa,\mu}\gamma = f$, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

(ii) $f|_{\kappa,\mu}(m, n) = f$, pour tout $(m, n) \in \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$;

(iii) f est “holomorphe à l'infini” : pour chaque pointe $\mathcal{C} = \gamma\infty \in \mathbb{P}^1(F)$, avec $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$, la fonction $f_{\mathcal{C}} := f|_{\kappa,\mu}\gamma$ admet un développement en série de Fourier

$$f_{\mathcal{C}}(z, v) = \sum_{\xi \in X, \alpha \in \mathfrak{a}} a_{\xi,\alpha} e^{2i\pi \operatorname{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi z + \alpha v)},$$

similaire à celui du (3). La condition d'holomorphie en la pointe $\mathcal{C}$ se lit alors :

$$a_{\xi,\alpha} \neq 0 \Rightarrow 4\xi\mu - \alpha^2 \in (X\mathfrak{c})_+ \cup \{0\}. \tag{10}$$

Principe du q-développement. Si pour tout $\xi \in X$, $\alpha \in \mathfrak{a}$ on a $a_{\xi,\alpha} = 0$, alors $f = 0$.

Pour tout $u \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$, il existe $\xi_u^* \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^*$, défini à X^* près, tel que $\begin{pmatrix} u & \xi_u^* \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{R}}$. L'invariance de $f_{\mathcal{C}}$ par le groupe $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{R}}$ nous donne pour tout $\xi \in X$ la relation :

$$a_{u^2\xi,u\alpha} = u^{\kappa} e^{2i\pi \operatorname{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(u\xi\xi_u^*)} a_{\xi,\alpha}. \tag{11}$$

En utilisant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{c}^* & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C} \otimes \mathfrak{c}^* & \xrightarrow{e^{2i\pi\cdot} \otimes \mathrm{id}} & \mathbb{C}^\times \otimes \mathfrak{c}^* & \longrightarrow & 0, \\ & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \operatorname{Tr}(\mu\cdot)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mu} & & \\ & & & & \mathbb{C} & \xrightarrow{e^{2i\pi\cdot}} & \mathbb{C}^\times & & \end{array}$$

on obtient pour tout $\beta \in \mathfrak{b}$ la relation :

$$a_{\mu\beta^2+\alpha\beta+\xi,\alpha+2\mu\beta} = a_{\xi,\alpha}. \tag{12}$$

Principe de Koecher. Si $F \neq \mathbb{Q}$, alors la condition (10) est toujours satisfaite. Si κ n'est pas parallèle, alors $a_{0,0} = 0$ (pas de séries d'Eisenstein parmi les formes de Hilbert–Jacobi). Enfin, il n'existe de formes de Hilbert–Jacobi non-nulles que si $\mu \in \mathfrak{c}_+$.

On montre d'abord, par l'absurde, que si $a_{\xi,\alpha}$ est non nul, alors $\xi \in X_+$. Soient $\alpha \in \mathfrak{a}$, $\xi \in X$ et $\xi^* \in X_+^*$ tels que $a_{\xi,\alpha} \neq 0$ et $\langle \xi, \xi^* \rangle < 0$. D'après (11), pour tout $u \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap T_{\mathbb{R}}$, on a $a_{u^2\xi,u\alpha} = u^{\kappa} a_{\xi,\alpha} \neq 0$. En particulier, $a_{0,0} = u^{\kappa} a_{0,0}$, d'où la deuxième propriété. Comme f est holomorphe au point $(\underline{i}\xi^*, 0)$, la série $\sum_{u \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma\cap T_{\mathbb{R}}} u^{\kappa} e^{-2i\pi\langle u^2\xi, \xi^* \rangle}$ converge absolument, ce qui est impossible, par le théorème des unités de Dirichlet.

La relation (12), nous dit alors que pour tout $\beta \in \mathfrak{b}$, on a $\mu\beta^2 + \alpha\beta + \xi \in X_+$. On en déduit que $\mu \in \mathfrak{c}_+$ et $4\xi\mu - \alpha^2 \in (X\mathfrak{c})_+ \cup \{0\}$. □

Tout comme les formes modulaires de Hilbert, les formes modulaires de Hilbert–Jacobi admettent elles aussi une définition purement géométrique.

Tout élément $\mu \in \mathfrak{c}$ donne un morphisme $(\mathrm{id}, \lambda \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \times \mathcal{A}^t$, d'où un faisceau inversible ample sur A, $\mathcal{L}_\mu = (\mathrm{id}, \lambda \circ (\mathrm{id} \otimes \mu))^* \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, où $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ désigne le faisceau de Poincaré sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^t$.

Définition 8.2. Soit R une $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre contenant les valeurs de κ. Une forme modulaire de Hilbert–Jacobi de poids $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$, indice $\mu \in \mathfrak{c}$, niveau Γ et à coefficients dans R, est une section globale de $f^*\underline{\omega}^\kappa \otimes \mathcal{L}_\mu$ sur $\mathcal{A} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R)$. On note $J_{\kappa,\mu}(R) = J_{\kappa,\mu}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) := \mathrm{H}^0(\mathcal{A} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R), f^*\underline{\omega}^\kappa \otimes \mathcal{L}_\mu)$ l'espace de ces formes modulaire de Hilbert–Jacobi.

Soit une $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ et soit R une $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}, \zeta_{\mathcal{C}}]$-algèbre. En évaluant une forme de Hilbert–Jacobi $f \in J_{\kappa,\mu}(R)$ sur les objets de Tate associés à une pointe $\mathcal{C}$, on obtient comme dans [25] le q-développement de f en $\mathcal{C}$

$$f_{\mathcal{C}} = \sum_{\xi \in X, \alpha \in \mathfrak{a}} a_{\xi,\alpha} q^\xi \mathfrak{X}^\alpha.$$

En transposant la méthode de [25] au cas de Hilbert on obtient alors les relations (11) et (12) qui impliquent, comme plus haut le principe de Koecher (10), lorsque $F \neq \mathbb{Q}$.

Principe du q-développement. Soient $M_1 \subset M_2$ sont des groupes abéliens et $f \in J_{\kappa,\mu}(M_2)$. Si le q-développement de f en une $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ est à coefficients dans M_1, alors $f \in J_{\kappa,\mu}(M_1)$.

Étant donné une compactification $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\widetilde{\Sigma},\varphi}$ de la variété de Hilbert–Blumenthal universelle $\mathcal{A}$, comme dans la partie 6, on définit l'espace des formes modulaire de Hilbert–Jacobi relatives à cette compactification :

$$J_{\kappa,\mu}(R; \widetilde{\Sigma}, \varphi) := \mathrm{H}^0(\overline{\mathcal{A}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R), f^*\underline{\omega}^\kappa \otimes \mathcal{L}_\mu).$$

À noter que le prolongement à $\overline{\mathcal{A}}$ du faisceau inversible ample $\mathcal{L}_\mu$ dépend de la polarisation φ.

Contrairement au cas des formes modulaires de Hilbert, pour les formes de Hilbert–Jacobi on a juste une inclusion

$$J_{\kappa,\mu}(R; \widetilde{\Sigma}, \varphi) \hookrightarrow J_{\kappa,\mu}(R)$$

Dans [25] Kramer démontre que cette inclusion est stricte pour les formes de Siegel-Jacobi. Il serait intéressant d'étudier cette question dans le cas de formes de Hilbert–Jacobi.

Comme dans la partie précédente, on peut alors associer à toute $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ et tout $f \in J_{\kappa,\mu}(R; \widetilde{\Sigma}, \varphi)$ son q-développement en $\mathcal{C}$

$$f_{\mathcal{C}} = \sum_{\substack{\xi \in X, \alpha \in \mathfrak{a} \\ (\xi,\alpha) \geq \varphi}} a_{\xi,\alpha} q^\xi \mathfrak{X}^\alpha.$$

Notons que

$$(\xi, \alpha) \geq \varphi \iff \forall q \in X_+^*, \ \forall l \in \mathfrak{a}^* \max_{\beta \in \mathfrak{b}} \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(-\mu q \beta^2 - 2\mu l \beta + \xi q + \alpha l) \geq 0,$$

alors que

$$4\xi\mu - \alpha^2 \geq 0 \iff \forall q \in X_+^*,\ \forall l \in \mathfrak{a}^* \max_{\beta\in\mathfrak{b}_{\mathbb{R}}} \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(-\mu q\beta^2 - 2\mu l\beta + \xi q + \alpha l) \geq 0.$$

L'anneau où vit le q-développement d'une forme de $J_{\kappa,\mu}(R;\widetilde{\Sigma},\varphi)$ est donc en général strictement inclus dans celui où vit le q-développement d'une forme de $J_{\kappa,\mu}(R)$. Il serait intéressant de savoir s'il existe des éventails $\widetilde{\Sigma}$, munis d'une fonction de polarisation φ pour lesquelles on a une égalité.

Séries thêta et formes de Hilbert de poids demi-entier.

Références : [32], [33], [36].

Dans cette section, on suppose que $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0^2$ est un carré et est premier à 2.

Sur $\mathbb{C}$. On déduit facilement de [32] (Prop.1.1 et 1.2, en fait plutôt Prop.3.2 et Lemme 3.5) qu'il existe un facteur d'automorphie de poids $t/2$ pour $\Gamma_0(\mathfrak{c},4)$, c'est-à-dire une fonction $h : \Gamma_0^1(\mathfrak{c},4)\times\mathfrak{H}_F \to \mathbb{C}^\times$ holomorphe en la seconde variable telle que

$$h(\gamma_1\gamma_2, z) = h(\gamma_1, \gamma_2(z))\cdot h(\gamma_2, z)$$

et pour tout $\gamma \in \Gamma_0^1(\mathfrak{c},4)$, en notant $t = \sum_{\tau\in J_F}\tau$,

$$(*)\quad h(\gamma,z)^2 = \chi(\gamma)\cdot j(\gamma,z)^t$$

où χ est un caractère quadratique de $\Gamma_0(4)$ qui ne dépend que de l'image dans $(\mathfrak{o}/4\mathfrak{o})^\times$ de d_γ.

Soit $\Gamma_0^1(\mathfrak{c},4)_+ = \mathrm{Ker}(\chi)$. C'est un sous-groupe de congruences d'indice 2 de $\Gamma_0^1(\mathfrak{c},4)$. Par exemple, si $F=\mathbb{Q}$, on a $\Gamma_0(4)_+ = \Gamma_1(4)$.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal entier de $\mathfrak{o}$ tel que Γ soit sans torsion.

Hypothèse. On suppose dans toute cette partie ainsi que dans celle concernant les formes de Hilbert p-adiques de poids demi-entier que 4 divise $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{o}$.

On a alors

$$\Gamma = \Gamma_1^1(\mathfrak{c},\mathfrak{n}) \subset \Gamma_0^1(\mathfrak{c},4)_+.$$

Par la formule $(*)$ ci-dessus, on a donc pour tout $\gamma\in\Gamma$, $h(\gamma,z)^2 = j(\gamma,z)^t$.

Pour tout poids demi-entier $\kappa = \frac{t}{2}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{Z}[J_F]$, on pose pour tout $\gamma\in\Gamma$, $j_\kappa(\gamma,z) = h(\gamma,z)\cdot j(\gamma,z)^\lambda$.

On note $G_\kappa(\Gamma)$ l'espace des fonctions f holomorphes sur $\mathfrak{H}_F$ satisfaisant $f(\gamma(z)) = j_\kappa(\gamma,z)\cdot f(z)$ pour tout $\gamma\in\Gamma$.

On définit un fibré inversible $\underline{\omega}^\kappa$ holomorphe sur M^{an}, correspondant au facteur d'automorphie $j_\kappa(\gamma,z)$; c'est le quotient de $\mathfrak{H}_F\times\mathbb{C}$ par Γ agissant par $\gamma(z,u) = (\gamma(z), j_\kappa(\gamma,z)\cdot u)$.

On a un isomorphisme canonique $G_\kappa(\Gamma)\cong \mathrm{H}^0(M^{\mathrm{an}},\underline{\omega}^\kappa)$.

Pour $z\in\mathbb{C}$, soit $e(z) = \exp(2i\pi z)$ et $\boldsymbol{e} : (F\otimes\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$, $z=(z_\tau)_\tau \mapsto e\big(\sum_\tau z_\tau\big)$.

Soit $\mathfrak{n} = 4\mathfrak{n}_0$. Pour chaque fonction $\eta : \mathfrak{c}_0 \to \mathbb{C}$, constante modulo $\mathfrak{n}_0\mathfrak{c}_0$, on définit une série thêta par

$$\theta(z, \eta) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{c}_0} \eta(\alpha) \boldsymbol{e}(\alpha^2 z)$$

C'est la valeur en $v = 0$ (Thetanullwert) de la fonction thêta de $(z, v) \in \mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C})$ et $\eta \in \mathcal{S}(F_f)$ définie comme suit : on fixe un élément c_0 de $\mathfrak{c}_0$ premier à 2 et qui engendre $\mathfrak{c}_0/\mathfrak{n}\mathfrak{c}_0$ et on pose

$$\theta(z, v; \eta) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{c}_0} \eta(\alpha) \boldsymbol{e}(\alpha^2 z + c_0 \alpha v)$$

Lemme 8.3. *On a $\theta(z, \eta) \in G_{t/2}(\Gamma)$. Les fonctions $\theta(z, \eta)$ pour η parcourant l'ensemble des fonctions sur $\mathfrak{c}_0/\mathfrak{n}_0\mathfrak{c}_0$, définissent des sections globales de $\underline{\omega}^{t/2}$ sur M^{an}.*

Démonstration. La modularité se déduit de [32] Prop.1.2, ou de [33] (4.3). Le point de la vérification est que, au sens de la Prop.2.4 de [33], on a ${}^g\eta = \eta$ pour tout g dans (le relèvement de) l'adhérence de Γ dans G_f. Il suffit pour cela de voir que pour tout $x \in \mathfrak{c}_0\widehat{\mathfrak{o}}$, la fonction caractéristique η_x de $x + \mathfrak{n}\mathfrak{c}_0\widehat{\mathfrak{o}}$ satisfait ${}^g\eta_x = \eta_x$. On se ramène à g triangulaire supérieure ou bien triangulaire inférieure, mais dans ce cas on exige que le coefficient c engendre l'idéal $\mathfrak{c}_0^2\mathfrak{d}\mathfrak{n}$. On conclut alors à l'aide des formules (3.2) et (3.3) de [32] et de la formule (i) de Prop.2.3 de [33]. □

Sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$. On va examiner la question de l'algébrisation et du prolongement des fibrés inversibles $\underline{\omega}^\kappa$ (κ demi-entier) à une compactification toroïdale $\overline{M}$. Pour cela on va rappeler des résultats classiques dans le cas du groupe symplectique mais qui mériteraient peut-être d'être détaillés davantage dans le cas des variétés de Hilbert.

Soit $N = N_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ l'espace de modules des $(A, \mathcal{L})$ où A est une VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée avec structure de niveau Γ et où $\mathcal{L}$ est un fibré inversible ample symétrique, trivialisé le long de la section nulle, définissant la polarisation sur A. Cet espace existe et est un schéma lisse sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$ par [11] IV.7. Soit $f : \mathcal{A} \to M$ la variété abélienne universelle sur M ; N est un $\mathcal{A}[2]$-torseur sur M ; il n'est pas connexe ; on peut montrer que son groupe des composantes connexes est naturellement isomorphe à $\mathfrak{d}^{-1}/2\mathfrak{d}^{-1}$. Soit $f_N : \mathcal{A}_N \to N$ le pull-back de f à N. Par définition, $\mathcal{A}_N$ est muni d'un fibré inversible symétrique relativement ample universel $\mathcal{L}$.

Donnons une description transcendante de N (inspirée de [11] V.3, p. 161) :

$$N^{\mathrm{an}} \cong \Gamma \setminus \left(\mathfrak{H}_F \times \frac{1}{2}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)/(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)\right)$$

pour l'action $\gamma \cdot (z, x) = (\gamma(z), x\gamma^{-1} + (\frac{1}{2}cd, \frac{1}{2}ab))$, pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La construction de cet isomorphisme est un exercice utilisant les Thetanullwerte $\theta(z, z + c_0 x, \eta_0)$, $x \in \frac{1}{2}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)/(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)$ et où $c_0 \in \mathfrak{c}_0$; voir p. 160–161 de [11].

Le sous-groupe d'Igusa de $\Gamma_1^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}_0)$ donné par les conditions ab et cd pairs est le stabilisateur de $x = (0, 0)$ dans Γ ; ceci fournit par conjugaison par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ une section j^{an} de M^{an} dans N^{an}. La description algébrique de l'image de M est le lieu où le fibré $\mathcal{L}$ est engendré par ses sections paires. C'est une composante connexe de N.

Remarque 8.4. Si $F = \mathbb{Q}$, seule une des quatre série thêta est paire et seul le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, parmi les quatre points de 2-torsion, est préservé par le sous-groupe d'Igusa.

Soit $j : M \to N$ la section algébrique (sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$) ainsi définie. Le fibré inversible $\mathcal{L}$ vu comme N-schéma n'est pas un schéma en groupes, mais il est muni d'une section nulle $0_{\mathcal{L}}$ (composée des sections nulles de $\mathcal{L} \to A$ et $A \to N$) ; soit $\mathcal{L}_0 = 0_{\mathcal{L}}^* T_{\mathcal{L}/\mathcal{A}}$ le fibré tangent relatif de $\mathcal{L} \times_N M$ sur M. On note pour abréger $\mathcal{V} = 0_{\mathcal{L}}^* T_{\mathcal{L}/M} = j^* 0_{\mathcal{L}}^* T_{\mathcal{L}/N}$ le fibré tangent de $\mathcal{L} \times_N M$ sur M. Ce fibré, muni de la filtration $\{0\} \subset \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{V}$, définit un torseur sous le parabolique stabilisateur de $\mathcal{L}_0$ dont le quotient de Levi est $\mathcal{T}_1 \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

Pour toute $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$-algèbre R et tout caractère ξ du quotient de Levi $\xi : \mathcal{T}_1 \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to R^\times$, on définit un fibré inversible algébrique $\mathcal{V}_\xi = \mathcal{V} \overset{\xi}{\times} \mathbb{G}_a$ sur M_R par contraction par ξ ; c'est-à-dire par quotient par la relation d'équivalence $(v\theta, \alpha) \sim (v, \xi(\theta) \cdot \alpha)$ pour $\theta \in \mathcal{T}_1 \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, $v \in \mathcal{V}$ et $\alpha \in \mathbb{G}_a$.

Lemme 8.5. *Pour tout poids demi-entier $\kappa = t/2 + \lambda$, soit $\xi_\kappa : \mathcal{T}_1 \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{C}^\times$ donné par $(x, y) \mapsto \lambda^{-1}(x) y$. On a un isomorphisme canonique*

$$\underline{\omega}^\kappa \cong \mathcal{V}_{\xi_\kappa}$$

de fibrés inversibles analytiques sur M^{an}.

Démonstration. On a la description transcendante suivante de la variété analytique $\mathcal{L}$ sur M^{an} :

$$\mathcal{L}^{\mathrm{an}} \cong \Gamma \setminus (\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C}) \times \mathbb{C}) / (\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*),$$

pour l'action $\gamma(z, v, u) = (\gamma(z), j(\gamma, z)^{-1} \cdot v, h(\gamma, z) \boldsymbol{e}(\frac{c}{(cz+d)} v^2) \cdot u)$ et $(z, v, u) \cdot (m, n) = (z, v + m \cdot z + n, \boldsymbol{e}(-\frac{1}{2} m^2 v) \cdot u)$.

Pour voir que la formule donnant l'action de Γ est correcte, il suffit de donner le cocycle $\Gamma \times \mathfrak{H}_F \to (F \otimes \mathbb{C})^\times \times \mathbb{C}^\times$ qui définit le fibré $0_{\mathcal{L}}^* T_{\mathcal{L}/M}^{\mathrm{an}}$.

1) Sa $(F \otimes \mathbb{C})^\times$-partie est imposée : c'est $j(\gamma, z)^{-1}$;

2) pour la $\mathbb{C}^\times$-partie, il suffit de noter que les fonctions $v \mapsto \theta(z, v; \eta)$ sont des sections globales sur $(F \otimes \mathbb{C}) = \mathrm{Lie}(\mathcal{A}_z)$ de $\mathcal{L}_z$ par la théorie analytique des diviseurs thêta (on laisse en exercice la démonstration détaillée de ce fait, disons seulement que l'on vérifie que les invariants de Weil $(H, \psi, 0, L)$ [35] VI.3 de $\theta(z, v, \eta)$ correspondent à ceux du diviseur symétrique ample Θ_z défini par $\mathcal{L}_z$). Le facteur d'automorphie cherché est alors donné par les relations $\theta(\gamma(z, v); \eta) = h(\gamma, z) \cdot \boldsymbol{e}(\frac{c}{(cz+d)} v^2) \cdot \theta(z, v; \eta)$ pour $\gamma \in \Gamma$ (voir Prop.1.1 de [32]).

On en déduit aisément que $\mathcal{V}_{\xi_\kappa}$ est défini par le même facteur d'automorphie que $\underline{\omega}^\kappa$; d'où le résultat. L'argument des séries thêta montre aussi que la formule pour l'action de $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$ est également correcte. $\square$

Corollaire 8.6. *Pour tout poids demi-entier* $\kappa = t/2 + \lambda$*, le fibré inversible complexe* $\underline{\omega}^\kappa$ *sur* M^{an} *est l'analytifié du fibré inversible algébrique* $\mathcal{V}_{\xi_\kappa}$*, défini sur* M *au-dessus de* $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$*. On notera encore* $\underline{\omega}^\kappa$ *ce fibré algébrique.*

On construit, comme dans [11] IV.7, pour tout éventail admissible Σ une compactification toroïdale lisse $\overline{\pi} : \overline{N} \to \overline{M}$ compatible à $N \to M$. Rappelons que le schéma semi-abélien $\mathfrak{G}$ sur $\overline{M}$ a une action de $\mathfrak{o}$ et est lui-aussi muni d'une $\mathfrak{c}$-polarisation $\lambda : \mathfrak{c} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}^t$ prolongeant celle de $\mathcal{A}$. Par définition de $\overline{N}$, le pull-back $\mathfrak{G}_N$ de $\mathfrak{G}$ est muni d'un fibré inversible symétrique relativement ample $\overline{\mathcal{L}}$ prolongeant $\mathcal{L}$. Soit $0_{\overline{\mathcal{L}}}$ la section nulle de $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\overline{N}$. On définit le prolongement de $\underline{\omega}^\kappa$ à $\overline{M}$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$ comme $\overline{\mathcal{V}}_{\xi_\kappa}$ où $\overline{\mathcal{V}} = \overline{j}^* 0^*_{\overline{\mathcal{L}}} T_{\overline{\mathcal{L}}/\overline{N}}$.

Pour toute $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$-algèbre R contenant les valeurs de κ, on peut ainsi définir le R-module des formes arithmétiques de poids demi-entier κ par

$$GD_\kappa(\Gamma; R) = \mathrm{H}^0(M \times \mathrm{Spec}(R), \underline{\omega}^\kappa)$$

et le principe de Koecher en poids demi-entier s'énonce :

$$GD_\kappa(\Gamma; R) = \mathrm{H}^0(\overline{M} \times \mathrm{Spec}(R), \underline{\omega}^\kappa)$$

Sa démonstration est analogue au cas entier.

On peut même définir le module des formes de tout poids demi-entier. Notons que $\underline{\omega} = f_* \Omega^1_{\mathcal{A}/M} = 0^* \Omega^1_{\mathcal{A}/M}$ par propreté de $\mathcal{A}$ sur M mais que $0^*_{\mathcal{L}} \Omega^1_{\mathcal{L}/M} \neq f_{\mathcal{L},*} \Omega^1_{\mathcal{L}/M}$.

Considérons le $\mathcal{T}_1$-torseur $\mathfrak{M} = \mathrm{Isom}_{\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_M}(\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_M, \underline{\omega})$; formons un $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-torseur sur $\mathfrak{M}$ donné par

$$\mathfrak{M}^+ = \mathrm{Isom}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}, 0^*_{\mathcal{L}} \Omega^1_{\mathcal{L}/\mathfrak{M}} / 0^* \Omega^1_{\mathcal{A}/\mathfrak{M}}))$$

ou encore $\mathfrak{M}^+ = \mathrm{Isom}_M(\mathcal{O}_M, \mathcal{V}^\vee / \underline{\omega})$.

C'est un $\mathcal{T}_1 \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-torseur de Zariski sur M.

En tant que M-schéma, il classifie les systèmes $(A, \lambda, \iota, \alpha, \mathcal{L}, \omega, s)_S$ sur un $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$-schéma S, où ω est une $\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_S$-base de $0^* \Omega_{A/S}$, et s une $\mathcal{O}_S$-base de $0^* \Omega_{\mathcal{L}/A}$.

On définit le module des formes modulaires de poids demi-entiers comme

$$GD(\Gamma, R) = \mathrm{H}^0(\mathfrak{M}^+ \times \mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathfrak{M}^+})$$

C'est un module gradué sur l'algèbre $\mathbb{Z}[J_F]$-graduée

$$G(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}, R) = \mathrm{H}^0(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}})$$

L'action $(f, g) \mapsto f \cdot g$ est induite par le pull-back à $\mathfrak{M}^+$ de $f \in \mathrm{H}^0(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}})$ par $\mathfrak{M}^+ \to \mathfrak{M}$; ce dernier morphisme provient de la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{A}$.

Fait. Pour tout $\kappa = t/2 + \lambda$, on a $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}^+}[\xi_\kappa] = \mathcal{V}_{\xi_\kappa} = \underline{\omega}^\kappa$ et donc $GD_\kappa(\Gamma, R) = GD(\Gamma, R)[\xi_\kappa]$. En effet, une fonction $f(*, \omega, s)$ satisfaisant pour tout

$$(x, y) \in \mathcal{T}_1 \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}, \quad f(*, x\omega, y \cdot s) = \lambda^{-1}(x) y f(*, \omega, s)$$

définit une section de $\mathcal{V}_{\xi_\kappa}$.

Par la définition algébrique de $\underline{\omega}^\kappa$, on peut définir le q-développement en une pointe $\mathcal{C}$ de M, d'une forme arithmétique de poids demi-entier κ comme le composé du développement de Fourier-Jacobi (*i.e.* le pull-back à la variété de Tate au-dessus de $\overline{S}^{\wedge}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$, défini comme une série grâce à la trivialité du pull-back du fibré $e^*\Omega^1_{\mathcal{L}/\mathrm{G}}$) et de l' évaluation $q_v \mapsto 1$ (*i.e.* $v = 0$).

Observons que sur le groupe des unités totalement positives de F, $u^\kappa = u^{t/2}u^\lambda = u^\lambda$ est bien défini et est à valeurs dans l'anneau des valeurs de λ.

On a le "principe du q-développement" en une pointe $\mathcal{C}$ (disons non-ramifiée) :

Proposition 8.7. *Pour toute extension $R \subset R'$ de $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$-algèbres contenant les valeurs de κ, si $f \in GD_\kappa(\Gamma; R')$ et $f \in R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)$, alors $f \in GD_\kappa(\Gamma; R)$.*

Idée de démonstration. Par irréductibilité géométrique de $\overline{M}$, une section du fibré $\underline{\omega}^\kappa$ est uniquement déterminée par son pull-back à la VAHB de Tate.

Application. Soit $R \subset \mathbb{C}$ une $\mathbb{Z}[\frac{1}{2\Delta}]$-algèbre contenant les valeurs de $\eta : \mathfrak{c}_0/\mathfrak{n}\mathfrak{c}_0 \to \mathbb{C}$; la séries thêta $\theta(z,\eta)$ dont on a montré qu'elle appartient à $GD_{t/2}(\Gamma)$ est en fait dans $GD_{t/2}(\Gamma; R)$. De même pour les séries d'Eisenstein [32], une fois établi leur q-développement. Nous espérons revenir sur ce point ultérieurement.

9 Tour d'Igusa et formes modulaires de Hilbert p-adiques

Une autre "presque-application" est le résultat fondamental d'irréductibilité de la tour d'Igusa. C'est une presque-application au sens que la méthode des compactifications toroïdales donne un résultat intéressant mais insuffisant pour établir cette irréductibilité. Rappelons que, par ailleurs, l'irréductibilité géométrique a été établie dans cette situation par Ribet [31] et dans une situation plus générale (pour les groupes symplectiques ou unitaires sur des corps totalement réels) par Hida [14]. Ribet utilise la monodromie locale en un point ordinaire et Hida utilise la théorie de Galois des tours de variétés de Shimura, due à Shimura.

Dans toute cette partie, on se limite au cas $D = \mathbb{G}_\mathrm{m}$ et donc $M = M^1$ de sorte qu'il y a une VAHB universelle $\mathcal{A} \to M$.

L'invariant de Hasse. On suppose toujours $[F:\mathbb{Q}] > 1$.

Soit M^*, resp. $\overline{M}$ la compactification minimale, resp. une compactification toroïdale, de M.

Rappelons que le prolongement canonique $\underline{\omega}^t_{\mathfrak{G}/\overline{M}}$ de $\underline{\omega}^t$ à $\overline{M}$ descend à M^* en un faisceau ample (on suppose comme d'habitude Γ net). Ceci est démontré dans [7] Thm8.6(vi).

Soit p premier, premier avec $\mathfrak{n}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$. Pour tout entier $m \geq 1$, soit

$$M_m^* = M^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}).$$

L'invariant de Hasse H est la section globale de $\underline{\omega}^{(p-1)t}$ sur M_1^* définie comme suit. Soit $V : \mathcal{A}^{(p)} \to \mathcal{A}$ le morphisme de Verschiebung sur M_1. Formons $V^* : \underline{\omega}_{\mathcal{A}/M_1} \to \underline{\omega}_{\mathcal{A}^{(p)}/M_1}$ et prenons sa puissance extérieure maximale $\bigwedge^d V^*$. Via l'identification canonique $\bigwedge^d \underline{\omega}_{\mathcal{A}^{(p)}/M_1} = \left(\bigwedge^d \underline{\omega}_{\mathcal{A}/M_1}\right)^{\otimes p}$, on interprète $\bigwedge^d V^*$ comme une section globale de $\underline{\omega}^{(p-1)t}_{\mathcal{A}/M_1}$. Par le principe de Koecher, c'est une section globale de $\underline{\omega}^{(p-1)t}$ sur M_1^*. On définit pour tout $m \geq 1$ le lieu ordinaire $M_m^{*,\mathrm{ord}}$ de M_m^* comme l'image inverse du lieu $M_1^{*,\mathrm{ord}}$ de M_1^* où $H \neq 0$. $M_1^{*,\mathrm{ord}}$ est un ouvert affine de M_1^* car H est une section globale d'un faisceau ample ; de plus, une puissance H^s se relève en E sur $\mathbb{Z}_p$, car une section modulo p d'un faisceau très ample se relève ; cette section définit un ouvert affine $M_m^{*,\mathrm{ord}}$ sur $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ d'équation $E \not\equiv 0 \pmod p$. Lorsque m tend vers l'infini, les complémentaires de ces ouverts définissent un voisinage tubulaire ouvert d'équation $|E|_p < 1$ du diviseur non-ordinaire $E = 0$ dans l'espace rigide M^{rig} associé aux M_m.

Soit $M_m^{\mathrm{ord}} = M_m^{*,\mathrm{ord}} \cap M_m$ et soit $\overline{M}_m^{*,\mathrm{ord}} = \pi^{-1}(M_m^{*,\mathrm{ord}})$.

Remarque 9.1. Par le caractère local du principe de Koecher (voir la démonstration du Théorème 7.1), on a lorsque $d > 1$:

$$\mathrm{H}^0(M_m^{\mathrm{ord}}, \mathcal{O}_{M_m^{\mathrm{ord}}}) = \mathrm{H}^0(\overline{M}_m^{\mathrm{ord}}, \mathcal{O}_{\overline{M}_m^{\mathrm{ord}}}) = \mathrm{H}^0(M_m^{*,\mathrm{ord}}, \mathcal{O}_{M_m^{*,\mathrm{ord}}})$$

Ceci entraîne que l'ouvert M_m^{ord} ne peut être affine, puisqu'il est distinct de l'ouvert affine $M_m^{*,\mathrm{ord}}$.

Tour d'Igusa et monodromie aux pointes. Pour tout $n \geq 1$, la composante neutre du schéma fini et plat $\mathcal{A}[p^n]$ est purement torique au-dessus de M_m^{ord}. On définit la tour d'Igusa sur M_m^{ord} par

$$T_{m,n} = \mathrm{Isom}_{M_m^{\mathrm{ord}}}(\mathfrak{d}^{-1} \otimes \mu_{p^n}, \mathcal{A}[p^n]^0) \to M_m^{\mathrm{ord}}, \quad n \geq 1$$

Notons que $T_{m,n} \to M_m^{\mathrm{ord}}$ est une suite de $(\mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o})^\times$-torseurs finis étales puisque

$$(\mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o})^\times = \mathrm{Aut}(\mathfrak{d}^{-1} \otimes \mu_{p^n}).$$

Le morphismes $T_{m,n} \to M_m^{\mathrm{ord}}$ sont donc affines.

La question de l'irréductibilité géométrique de la tour d'Igusa équivaut à celle de la connexité géométrique de ces revêtements (puisque la base est géométriquement connexe). Ceci équivaut aussi à la surjectivité des représentations associées à ces revêtements (après choix d'un point base géométrique) :

$$\rho_n : \pi_1(M_1 \otimes \overline{\mathbb{F}}_p) \to (\mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o})^\times.$$

Cette surjectivité a été établie par Ribet [31] et Hida [14] dans un cadre plus général (voir aussi [15]). Chai, [3] Sect.4.6, a proposé une autre approche via les compactifications toroïdales, inspirée de [11] V.7. Malheureusement, cette approche n'est pas concluante dans toutes les situations de compactifications toroïdales, et en particulier pas dans le cas des variétés de Hilbert. Expliquons pourquoi. L'idée est de calculer la monodromie locale au voisinage d'une pointe non-ramifiée dans la compactification minimale. Elle ne permet cependant que d'obtenir un sous-groupe fermé de $(\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^\times$ qui est ouvert si la conjecture de Leopoldt est vraie.

Pour alléger la notation dans l'argument ci-dessous, on omet (mais on sous-entend) l'extension des scalaires à $\overline{\mathbb{F}}_p$. Tout d'abord le cas $F = \mathbb{Q}$ est connu. Par conséquent, la VAHB obtenue en formant le produit tensoriel de la courbe elliptique universelle au-dessus de la courbe modulaire Y par $\mathfrak{o}$ (puis si nécessaire une $\mathfrak{c}$-isogénie pour obtenir une

$\mathfrak{c}$-polarisation) fournit un morphisme de Y dans la variété de Hilbert qui permet d'inclure $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ dans l'image de ρ_n.

Pour obtenir un gros sous-groupe du noyau $(\mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o})_1^\times$ de la norme, Chai procède comme suit. Soit $\pi : \overline{M}_1 \to M_1^*$. Soit $\mathcal{C}$ une pointe non-ramifiée de M_1^* et soit R la complétion de l'anneau local de M_1^* en $\mathcal{C}$. Posons $\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}} = \coprod_{\sigma\in\Sigma^{\mathcal{C}}} \overline{S}_\sigma$ et $\overline{S}'_{\Sigma^{\mathcal{C}}} = \overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$. Soit $(\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}})^0$ (resp. $(\overline{S}'_{\Sigma^{\mathcal{C}}})^0$) le complémentaire du diviseur à l'infini $(\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}})^\infty$ (resp. $(\overline{S}'_{\Sigma^{\mathcal{C}}})^\infty$). L'image de Spec$(R)$ dans M_1^* est contenue dans $M_1^{*\,\mathrm{ord}}$, grâce à la description de la VAHB universelle sur Spec(R) comme quotient de Mumford. On a des morphismes de groupes

$$\pi_1((\overline{S}'_{\Sigma^{\mathcal{C}}})^0) \to \pi_1(\mathrm{Spec}(R)\setminus\{\mathcal{C}\}) \to \pi_1(M_1^{\mathrm{ord}})$$

On observe que l'on a un revêtement étale

$$\overline{\xi}_n : \overline{T}_{1,n} = \mathrm{Isom}_{\overline{M}_1}(\mathfrak{d}^{-1}\otimes\mu_{p^n}, \mathfrak{G}_1[p^n]^0) \to \overline{M}_1^{\mathrm{ord}} = \pi^{-1}(M_1^{*\,\mathrm{ord}})$$

prolongeant le revêtement étale $T_{1,n} \to M_1^{\mathrm{ord}}$.

Le pull-back de $\overline{\xi}_n$ à $\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ est trivial car la description de $\mathfrak{G}_1|_{\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}}$ comme variété de Tate montre que sur $\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$, on a un isomorphisme canonique $\mathfrak{G}_1[p^n]^0 \cong \mu_{p^n}\otimes\mathfrak{a}$ compatible avec l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$. Ainsi $\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}\times\overline{T}_{1,n} = \overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}\times(\mathfrak{o}/p^n)^\times$ et l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ sur le membre de gauche correspond à l'action diagonale sur le membre de droite. L'image de ρ_n contient donc l'image de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ dans $(\mathfrak{o}/p^n)^\times$.

On notera que le revêtement connexe étale $\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\infty \to (\overline{S}'_{\Sigma^{\mathcal{C}}})^\infty$ de groupe $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ n'est pas de type fini (seulement localement de type fini). Néanmoins on peut former une tour de revêtements finis connexes étales en quotientant $\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\infty$ par $(\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times)^{p^n}$.

Comme le pull-back de $\mathfrak{G}_1 \to \overline{M}_1$ à $(\overline{S}'_{\Sigma^{\mathcal{C}}})^\infty$ est le quotient du tore de Tate sur $(\overline{S}_{\Sigma^{\mathcal{C}}})^\infty$ par $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$, on voit que $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times/(\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times)^{p^n}$ est contenue dans l'image de ρ_n dans $(\mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o})^\times$. En passant à la limite projective, on obtient l'image de $\pi_1(M_1^{\mathrm{ord}})$ dans $(\mathfrak{o}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times$ contient bien $\mathbb{Z}_p^\times\cdot\overline{\mathfrak{o}^\times}$.

Formes modulaires p-adiques. Cette théorie est une application directe de l'irréductibilité de la tour d'Igusa.

On a défini $\overline{T}_{m,n}$ dans la section précédente ; c'est un torseur fini étale sur $\overline{M}_m^{\mathrm{ord}}$; il est donc affine sur ce schéma. Ce dernier n'est pas affine, mais on a vu que $\mathrm{H}^0(\overline{M}_m^{\mathrm{ord}}, \mathcal{O}_{\overline{M}_m^{\mathrm{ord}}}) = \mathrm{H}^0(M_m^{\mathrm{ord}}, \mathcal{O}_{M_m^{\mathrm{ord}}})$ et que le spectre de cet anneau est $M_m^{*,\mathrm{ord}}$. Soit

$$V_{m,n} = \mathrm{H}^0(T_{m,n}, \mathcal{O}_{T_{m,n}}) = \mathrm{H}^0(\overline{T}_{m,n}, \mathcal{O}_{\overline{T}_{m,n}})$$

l'algèbre des fonctions régulières sur $T_{m,n}$. En passant à la limite inductive sur n puis projective sur m, on obtient l'anneau $\mathbb{V}$ des fonctions sur le ind-pro-schéma

$$T_{\infty,\infty} \to M_\infty^{\mathrm{ord}}$$

Notons que comme les morphismes de transition $T_{m,n+1} \to T_{m,n}$ sont affines, $T_{m,\infty}$ est un schéma et $T_{\infty,\infty}$ est un schéma formel sur M_∞.

M_∞^{ord} est le schéma formel obtenu en retirant le lieu supersingulier $E \equiv 0 \pmod p$ de la complétion M_∞ du schéma $M_{\mathbb{Z}_p}$ le long de sa fibre spéciale (E désigne un relèvement quelconque de H^s sur $\mathbb{Z}_p$ comme précédemment). Dans le langage de la géométrie rigide, on retire le voisinage tubulaire ouvert de rayon 1 autour du diviseur supersingulier.

Soit $\mathcal{A}_p$ la catégorie des algèbres p-adiquement complètes. Le ind-pro-schéma $T_{\infty,\infty}$ représente le foncteur qui associe à $R \in \mathcal{A}_p$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(A, \iota, \lambda, \alpha, \phi)_{/R}$ où $(A, \iota, \lambda, \alpha)$ définit un point de $M \times \mathrm{Spec}(R)$ et $\phi : \mu_{p^\infty} \otimes \mathfrak{d}^{-1} \to A[p^\infty]$ est une immersion fermée de groupes p-divisibles. De façon équivalente, on peut définir ϕ comme un isomorphisme de groupes formels $\widehat{\mathbb{G}}_m \otimes \mathfrak{d}^{-1} \to \widehat{A}$ (complétions des schémas en groupes le long de leur section unité). On appelle un tel plongement ϕ une rigidification du groupe formel $\widehat{A}$.

Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre p-adiquement complète R, on pose

$$\mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) = \mathbb{V} \widehat{\otimes} R$$

On l'appelle l'algèbre des formes modulaires p-adiques de niveau auxiliaire $\mathfrak{n}$ à coefficients dans R. Elle est munie d'une action du groupe de Galois $\mathcal{T}_1(\mathbb{Z}_p) = (\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^\times$ du revêtement $T_{\infty,\infty} \to M_\infty^{\mathrm{ord}}$. On pose pour tout homomorphisme continu $\kappa : \mathcal{T}_1(\mathbb{Z}_p) \to R^\times$

$$\mathbb{V}_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) = \mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)[-\kappa]$$

La donnée d'une rigidification $\phi : \widehat{\mathbb{G}_\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{d}^{-1} \to \widehat{A}$ induit un isomorphisme $\phi^* : \mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{T_{\infty,\infty}} \cong \underline{\omega}$ par le principe Géométrie Algébrique-Géométrie Formelle pour le schéma propre $\mathcal{A}$ sur M. Soit $\mathfrak{M}_\infty$ la complétion de $\mathfrak{M}$ formelle le long de la fibre spéciale. On obtient un morphisme de M_∞-schémas formels $T_{\infty,\infty} \to \mathfrak{M}_\infty$; il fournit un homomorphisme j de l'algèbre des formes classiques vers celle des formes p-adiques.

$$j : G(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = \mathrm{H}^0(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_\mathfrak{M}) \to \mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$$

Remarque 9.2. Si κ est un caractère algébrique de $\mathcal{T}_1$, j envoie les formes classiques de poids κ vers les formes p-adiques de poids κ. Cette application est injective (voir ci-dessous) mais est loin d'être surjective, le module de droite étant de rang infini. La théorie de Hida permet de montrer que sur les sous-modules des formes ordinaires, on a un isomorphisme. Il serait intéressant par une généralisation appropriée de méthodes de Mazur-Coleman d'étendre aux formes de Hilbert surconvergentes de pente fixée un tel résultat de classicité.

Théorème 9.3. 1) *Pour toute $(R, \mathfrak{n})$-pointe non-ramifiée $\mathcal{C}$, on a un homomorphisme injectif*

$$\mathrm{ev}_\mathcal{C} : \mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) \to R[[q^\xi; \xi \in X_+ \cup \{0\}]],$$

où $X = \mathfrak{c}\mathfrak{b}^2$, qui est donné par l'évaluation sur la VAHB de Tate sur $\overline{S}^0_{\mathcal{C},\sigma}$, munie de sa rigidification canonique (pour tout $\sigma \in \Sigma^\mathcal{C}$). De plus, pour toute $R \in \mathcal{A}_p$, si $f \in \mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$ et pour toute $(R, \mathfrak{n})$-pointe non-ramifiée $\mathcal{C}$ de M, on a $\mathrm{ev}_\mathcal{C}(f) \in pR[[q^\xi]]$, alors $f \in p\,\mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$.

2) *le morphisme* $\mathrm{ev}_\mathcal{C}$ *est compatible via l'homomorphisme j avec celui défini pour les formes classiques.*

Démonstration. 1) Rappelons la propriété universelle de $\overline{T}_{\infty,\infty} = \mathrm{Isom}_{\overline{M}_\infty^{\mathrm{ord}}}(\mu_{p^\infty} \otimes \mathfrak{d}^{-1}, \mathfrak{G}[p^\infty]^0)$: Pour tout schéma semi-abélien $G \to S$ sur un schéma formel S et pour tout morphisme $G \to \mathfrak{G}$ au-dessus d'un morphisme $S \to \overline{M}_\infty$, il y a une bijection canonique entre l'ensemble des rigidifications $\mu_{p^\infty} \otimes \mathfrak{d}^{-1} \cong G[p^\infty]^0$ et celui des relèvements $S \to \overline{T}_{\infty,\infty}$ du morphisme donné $S \to \overline{M}_\infty$.

La rigidification canonique $\mu_{p^\infty} \otimes \mathfrak{d}^{-1} \cong G_\sigma[p^\infty]^0$ fournit donc un morphisme de schémas formels de la complétion p-adique de $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}$ vers $\overline{T}_{\infty,\infty}$. Ce morphisme est étale. L'irréductibilité du schéma formel $\overline{T}_{\infty,\infty}$ entraîne qu'une section globale d'un faisceau localement libre sur $\overline{T}_{\infty,\infty}$ nulle sur $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}$ est identiquement nulle.

2) Cet énoncé pour une algèbre R résulte de 1) appliqué à l'algèbre R/pR. □

Corollaire 9.4. *Pour tout poids $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$, j restreint à $G_\kappa(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R)$ est injectif.*

Remarque 9.5. Si R est plate sur $\mathbb{Z}_p$, par indépendance linéaire des caractères algébriques distincts, on déduit du corollaire que l'application j elle-même est injective. Par contre, ce n'est pas le cas pour une $\mathbb{Z}_p$-algèbre p-adique quelconque (c'est faux pour $\mathbb{F}_p$).

Corollaire 9.6. *L'homomorphisme* $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}$ *est d'image fermée dans $R[[q^\xi; \xi \in X_+ \cup \{0\}]]$ muni de la topologie de la convergence coefficient par coefficient.*

Démonstration. Si $f_n \in \mathbb{V}(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R)$ et $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}(f_{n+1}) \equiv \mathrm{ev}_{\mathcal{C}}(f_n) \pmod{p^n}$, alors, $f_{n+1} \equiv f_n \pmod{p^n\,\mathbb{V}(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R)}$ et donc f_n converge dans l'algèbre p-adiquement complète $\mathbb{V}(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R)$. □

Pour chaque $r \geq 1$; on va définir un homomorphisme d'algèbres

$$j_r : G(\mathfrak{c},\mathfrak{n}p^r;R) \to \mathbb{V}(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R)$$

compatible avec les poids.

Le théorème de représentabilité de Mumford (GIT) entraîne qu'il existe un $\mathbb{Z}_p$-schéma quasi-projectif de type fini $M_0(\mathfrak{c},\mathfrak{n}p^r)$ classifiant les VAHB $\mathfrak{c}$-polarisées $(A,\iota,\lambda,\alpha)_S$ munies d'un $\mathfrak{o}/p^r$-module cyclique C (c'est-à-dire, localement libre sur $\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_S$ de rang p^r et annulé par p^r exactement). La normalisation de ce schéma dans $M_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n}p^r) \times \operatorname{Spec}\mathbb{Q}_p$ définit un modèle entier sur $\mathbb{Z}_p$ de $M_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n}p^r)$. Il est muni d'un morphisme propre et plat π_r vers M.

Les faisceaux $\underline{\omega}^\kappa$ sur $M_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n}p^r)$ sont les pull-back par π_r des $\underline{\omega}^\kappa$ sur M. Soit $M_{\infty,r}$ la complétion formelle de ce schéma le long de sa fibre spéciale. La définition de $T_{\infty,r}$ comme solution du problème de modules des immersions fermées $\mu_{p^r} \otimes \mathfrak{d}^{-1} \hookrightarrow A[p^r]$ montre qu'il y a une immersion ouverte canonique $T_{\infty,r} \hookrightarrow M_{\infty,r}$. Cette immersion est d'image dense dans l'une des composantes irréductibles de $M_{\infty,r}$. Soit $\mathfrak{M}_{\infty,r} = \mathfrak{M}_\infty \times_{M_\infty} M_{\infty,r}$. On a vu qu'il y a un M_∞-morphisme canonique $T_{\infty,\infty} \to \mathfrak{M}_\infty$; on vient d'autre part de construire un M_∞-morphisme $T_{\infty,\infty} \to T_{\infty,r} \to M_{\infty,r}$; on obtient donc un morphisme $T_{\infty,\infty} \to \mathfrak{M}_{\infty,r}$ qui fournit l'homomorphisme d'algèbres j_r par restriction au lieu ordinaire sur les fonctions.

Soit $M_{\infty,\infty} = \varprojlim M_{\infty,r}$. En fait, en passant à la limite projective sur les morphismes $T_{\infty,\infty} \to \mathfrak{M}_{\infty,r}$, on voit facilement que

$$T_{\infty,\infty} \to \mathfrak{M}_{\infty,\infty} \quad \text{et} \quad T_{\infty,\infty} \to M^{\mathrm{ord}}_{\infty,\infty}$$

sont des immersions ouvertes. On peut définir un fibré inversible

Si l'on ne tient pas à préserver l'intégralité (c'est à dire que l'on se limite aux $\mathbb{Q}_p$-algèbres), on peut aussi formuler cette construction en considérant l'espace rigide $T_{\infty,r}^{\mathrm{rig}}$ associé à $T_{\infty,r}$; c'est un ouvert de $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r)^{\mathrm{rig}}$; l'avantage de cette approche est que ces espaces rigides sont lisses et connexes (alors que le schémas formel de $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r)$ a un grand nombre de composantes irréductibles).

Soit $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r)^{\mathrm{ord}}$ l'image inverse dans $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r)^{\mathrm{rig}}$ de $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})^{\mathrm{ord}}$ par le morphisme d'oubli du groupe cyclique d'ordre p^r. On voit que $T_{\infty,r}^{\mathrm{rig}}$ est contenu dans $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r)^{\mathrm{ord}}$. Par conséquent le $\mathcal{T}_1$-torseur rigide $\mathfrak{M}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r)^{\mathrm{rig}}$ sur $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r)^{\mathrm{rig}}$ classifiant les VAHB munies d' un $\mathfrak{o}$-groupe cyclique d'ordre p^r et d'une $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$-base de $\underline{\omega}$, est image de $T_{\infty,\infty}^{\mathrm{rig}}$ par le même argument que précédemment.

Théorème 9.7. *Pour tout $r \geq 1$, pour tout $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$, l'homomorphisme d'algèbres des formes classiques de niveau p^r vers les formes p-adiques*

$$j_{r,\kappa} : G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r; R) \to \mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$$

est injectif.

Démonstration. On sait d'une part que l'intégralité est préservée ; on considère d'autre part les espaces rigides $\mathfrak{M}_{\infty,r}^{\mathrm{rig}}$ resp. $T_{\infty,\infty}$, qui sont connexes par l'irréductibilité de la tour d'Igusa. Ceci entraîne l'injectivité du q-développement des formes classiques de niveau $\mathfrak{n}p^r$ ainsi que celui des formes p-adiques aux $(R, \mathfrak{n})$-pointes de M relevées à l'aide de la rigidification canonique ϕ_{can} de la VAHB de Tate associée à $\mathcal{C}$. On déduit alors le théorème de la compatibilité des morphismes de q-développement. □

Remarque 9.8. 1) À la différence du cas du niveau premier à p, l'utilisation de la géométrie rigide simplifie l'argument car la fibre spéciale de $M_1(p^r)$ est compliquée.

2) L'homomorphisme j_r somme des $j_{r,\kappa}$ est injectif si R est $\mathbb{Z}_p$-plate.

En fait, la compatibilité des morphismes de q-développement est vraie sur un ensemble de pointes p-adiques plus grand que l'ensemble fini des relèvements standards des $(R, \mathfrak{n})$-pointes $\mathcal{C}$ de M donnés par la rigidification canonique ϕ_{can} de la VAHB de Tate associée à $\mathcal{C}$. Cet ensemble est appelé l'ensemble des pointes non-ramifiées. On va le définir et le caractériser à l'aide de l'immersion ouverte (de schémas formels ou rigides)

$$T_{\infty,\infty} \to \mathfrak{M}_{\infty,\infty}$$

Définition 9.9. Une pointe de $T_{\infty,\infty}$ est un couple constitué d'une $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ de M et de la classe d'isomorphisme $i(a)$ $(a \in (\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^\times)$ du morphisme canonique

$$\mathrm{Tate}_{\mathcal{C}}(q) \to \overline{T}_{\infty,\infty}$$

donné par la VAHB de Tate $(\mathrm{Tate}_{\mathcal{C}}(q), \iota_{\mathrm{can}}, \lambda_{\mathrm{can}}, \alpha_{\mathrm{can}})$ au-dessus de $\overline{S}_{\mathcal{C},\Sigma^{\mathcal{C}}} \to \overline{M}$, munie de la rigidification $\phi_{\mathrm{can}} \circ [a]$).

Deux telles classes d'isomorphisme $i(a)$ et $i(a')$ coïncident si et seulement si a et a' sont congrus modulo $\overline{\mathfrak{o}^\times}$ car ce groupe agit par automorphismes du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tate}_{\mathcal{C}}(q) & \longrightarrow & \overline{T}_{\infty,\infty} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{S}_{\mathcal{C}} & \longrightarrow & \overline{M} \end{array} .$$

Soit P_∞^T l'ensemble des pointes de $T_{\infty,\infty}$. La fibre de P_∞^T au-dessus d'une pointe de M est donc un $(\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^\times / \overline{\mathfrak{o}^\times}$-torseur.

Notons P_∞ l'ensemble des pointes de $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^\infty) = \varprojlim M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r)$. C'est un espace p-adique compact et il résulte immédiatement du théorème d'approximation forte et de la décomposition d'Iwasawa que P_∞ est un fibré au-dessus de l'ensemble des pointes de $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$, ses fibres étant des copies de

$$U(\mathbb{Z}_p) \setminus G(\mathbb{Z}_p) / \overline{\mathcal{T}_1(\mathbb{Z}_p)} U(\mathbb{Z}_p)$$

où U est le radical unipotent du Borel supérieur. Par action sur l'ouvert des vecteurs primitifs $((\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^2)_{\mathrm{prim}}$ de $(\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^2$, on identifie ce quotient à

$$U(\mathbb{Z}_p) \setminus ((\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^2)_{\mathrm{prim}} / \overline{\mathfrak{o}^\times}.$$

Ce quotient s'identifie à l'ensemble des classes d'homothétie par un scalaire de $\overline{\mathfrak{o}^\times}$ de vecteurs primitifs $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ dans $(\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^2$, où $c \in (\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)$ et a parcourt un système de représentants de $(\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)/(c)$. Notons $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ une telle classe. Tout élément de P_∞ s'écrit donc comme un couple constitué d'une $(R, \mathfrak{n})$-pointe de M et d'une classe $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$. On introduit la notion de profondeur d'une pointe :

$$\mathrm{prof}_p\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\right) = \mathrm{ord}_p(c)$$

Les pointes de profondeur infinie sont appelées les pointes non ramifiées. Soit P_∞^{nr} le sous-espace des pointes non-ramifiées ; c'est un torseur sous $(\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^\times / \overline{\mathfrak{o}^\times}$ au-dessus de l'ensemble des pointes de M.

Lemme 9.10. *L'immersion ouverte $T_{\infty,\infty} \hookrightarrow M_{\infty,\infty}$ identifie P_∞^T et P_∞^{nr}.*

Soit $\mathcal{C}(P_\infty^{\mathrm{nr}}; R)$ l'espace des fonctions continues sur P_∞^{nr} à valeurs dans une algèbre p-adique R. On peut repérer une telle pointe comme un couple constitué d'une $(R, \mathfrak{n})$-pointe c et d'un élément a de $(\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^\times$. Pour tout $f \in \mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$, le q-développement en une pointe non ramifiée (c, a) est bien défini : c'est l'évaluation sur la variété de $\mathrm{Tate}_c(q)$ munie de la rigidification

$$\phi_c \circ [a] : \widehat{\mathbb{G}}_m \otimes \mathfrak{d}^{-1} \to \widehat{\mathrm{Tate}}_c(q), \quad t \mapsto \phi_c([a](t))$$

Ces flèches de q-développement induisent un homomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{ev} : \mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) \to \mathcal{C}(P_\infty^{\mathrm{nr}}; R)$$

Le noyau s'appelle l'espace des formes modulaires p-adiques cuspidales. C'est un idéal de $\mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$ noté $\mathbb{V}^{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$

Par ce qui précède, $\mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$ contient pour chaque poids $\kappa \geq 2t$

$$G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^\infty; R) = \bigcup_{r \geq 0} G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^r; R)$$

ainsi que

$$G(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) = \bigoplus_{\kappa \geq 0} G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$$

Il est de plus évident que les formes cuspidales classiques sont envoyées dans les formes p-adiques cuspidales. Hida a démontré

Théorème 9.11. *Soit R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre plate et p-adiquement complète. Alors*

(i) $G^{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)[\frac{1}{p}] \cap \mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$ *est dense dans* $\mathbb{V}^{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$,

(ii) *De même, pour tout $\kappa \geq 2t$, $G_\kappa^{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}p^\infty; R)$ est dense dans $\mathbb{V}^{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$ sur les parties ordinaires.*

Le premier énoncé est démontré dans [19], essentiellement pour toutes les variétés PEL (voir Th.2.2 et Cor.3.4). Le second est démontré dans [17]. L'énoncé analogue sans limitation aux parties cuspidales n'est pas établi mais il est conjecturé.

Formes modulaires de Hilbert de poids demi-entier *p*-adiques. Nous allons donner une définition purement algébro-géométrique des formes modulaires de Hilbert p-adiques de poids demi-entier. L'avantage de ce point de vue est qu'il évite de recourir à la multiplication par une série thêta de poids $t/2$ pour passer du poids demi-entier au poids entier pour établir les propriétés arithmétiques des formes de poids demi-entier. De cette manière, on peut établir directement différents résultats obtenus par Hida dans [16] Sect.2, h.1-h5. Nous reviendrons sur ce point dans un travail ultérieur.

Soit p premier, premier avec $\underset{\sim}{2}\,\mathrm{N}(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{n})$. Pour chaque couple (m, n) d'entiers, $m, n \geq 1$, on a défini le $(\mathfrak{o}/p^n\mathfrak{o})^\times$-torseur $\widetilde{T}_{m,n}$ fini étale sur M_m^{ord}.

On considère le $T_{m,n}$-schéma donné par

$$T_{m,n}^+ = \mathrm{Isom}_{T_{m,n}}(\mathcal{O}_{T_{m,n}}, 0^*\Omega_{\mathcal{L}/\mathcal{A}})$$

c'est un $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-torseur sur $T_{m,n}$.

Chaque schéma $T_{m,n}^+$ est géométriquement connexe par irréductibilité de la tour d'Igusa. Soit $V_{m,n}^+$ l'anneau des fonction sur $T_{m,n}^+$. Il est muni d'une action de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. La partie de $V_{m,n}^+$ sur laquelle $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ agit trivialement n'est autre que $V_{m,n}$. Considérons celle où $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ agit par $m_1 : y \mapsto y$. Notons-la $VD_{m,n}$. On a une action naturelle de $V_{m,n}$ sur $VD_{m,n}$ induite par la multiplication dans $V_{m,n}^+$. Pour toute algèbre p-adiquement complète R, on définit le module des formes modulaires p-adiques de Hilbert à coefficients dans R comme

$$\mathbb{VD}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) = \Big(\varprojlim_m \varinjlim_n VD_{m,n}\Big)\widehat{\otimes} R$$

C'est naturellement un $\mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$-module.

On a un morphisme naturel $T^+_{\infty,\infty} \to \mathfrak{M}^+$ défini par pull-back à $\mathfrak{M}^+$ de $T_{\infty,\infty} \to \mathfrak{M}$. Il fournit un morphisme

$$j_d : GD(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) \to \mathbb{VD}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$$

compatible avec les actions des formes modulaires de poids entier classiques resp. p-adiques pour l'homomorphisme

$$j : G(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) \hookrightarrow \mathbb{V}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$$

En particulier, pour tout poids demi-entier $\kappa = t/2 + \lambda$, si l'on pose

$$\mathbb{VD}_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) = \mathbb{V}^+(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)[\xi_\kappa] = \mathbb{VD}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)[\lambda^{-1}]$$

on a

$$j_d : GD_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) \to \mathbb{V}_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$$

On a une notion de q-développement aux pointes non-ramifiées. Considérons d'abord les pointes non-ramifiées standards (données par la rigidification canonique des VAHB de Tate). Observons que pour toute $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ de M, et tout $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, le pull-back du fibré $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\mathfrak{G}$ à la VAHB de Tate $\mathrm{Tate}_{\mathcal{C}}(q)$ sur $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}$ est trivial. La base 1 fournit alors un morphisme de la complétion p-adique de $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}$ vers $T^+_{\infty,\infty}$, qui fournit un homomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{C}} : \mathbb{VD}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) \to R[[q^\xi; \xi \in X_+ \cup \{0\}]].$$

On a un principe du q-développement (conséquence de l'irréductibilité géométrique de la tour des $T^+_{m,n}$) qui affirme l'injectivité de $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}$ et même son “universelle injectivité” : si $R \subset R'$, si f est définie sur R' et si $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}(f)$ est à coefficients dans R, alors f est définie sur R.

La compatibilité de $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}$ avec la flèche de q-développement des formes de Hilbert de poids demi-entier arithmétiques entraîne l'injectivité de j_κ pour chaque poids demi entier κ et l'injectivité de j_d sur toute algèbre p-adique $\mathbb{Z}_p$-plate. En outre, ceci entraîne que l'image de $\mathbb{VD}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$ est fermée dans $R[[q^\xi; \xi \in \mathfrak{c}_+ \cup \{0\}]]$ muni de la topologie de la convergence coefficient par coefficient. La démonstration est la même que pour les formes p-adiques de poids entier.

On définit le module des formes cuspidales de poids demi-entier comme le noyau de l'application

$$\mathbb{VD}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R) \to \mathcal{C}(P^{\mathrm{nr}}_\infty, R)$$

donnée par $f \mapsto \phi_f$ où pour chaque $a \in (\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^\times/\overline{\mathfrak{o}^\times}$, $\phi_f(a)$ désigne le terme constant du q-développement

$$f\big(\mathrm{Tate}_{\mathcal{C}}(q), \iota_{\mathrm{can}}, \lambda_{\mathrm{can}}, \alpha_{\mathrm{can}}, \phi_{\mathrm{can}} \circ [a], s_{\mathrm{can}}\big)$$

Application. On peut définir des formes modulaires de Hilbert p-adiques de poids demi-entier en formant les q-développements de séries thêta et de séries d'Eisenstein associées à des caractères p-adiques continus de conducteur divisant $\mathfrak{c}_0 N p^\infty$. Ces caractères sont limites de caractères algébriques qui définissent des formes de poids demi-entier arithmétiques. Ces séries définissent donc des éléments de $\mathbb{VD}(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R)$, où R est une algèbre p-adiquement complète contenant les coefficients des séries finie et plate sur $\mathbb{Z}_p$.

Références

[1] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y. Tai, *Smooth compactification of locally symmetric varieties*. Lie groups. History, frontiers and applications Vol. IV, Math. Sci. Press, Brookline, MA, 1975.

[2] J.-L. Brylinski and J.-P. Labesse, Cohomologies d'Intersection et Fonctions L de Certaines Variétés de Shimura. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **17** (1984), 361–412.

[3] C.-L. Chai, Arithmetic minimal compactification of the Hilbert-Blumenthal moduli space. *Ann. of Math.* **131** (1990), 541–554.

[4] L. Clozel, Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, vol. I, Perspect. Math. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, 77–159.

[5] P. Deligne, Théorie de Hodge, II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **40** (1971), 5–58.

[6] P. Deligne and G. Pappas, Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant. *Compositio Math.* **90** (1994), 59–79.

[7] M. Dimitrov, Compactifications arithmétiques des variétés de Hilbert et formes modulaires de Hilbert pour $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$. In *Geometric Aspects of Dwork Theory* (A. Adolphson, F. Baldassarri, P. Berthelot, N. Katz and F. Loeser, eds.), Walter de Gruyter, Berlin 2004, 525–551.

[8] —, Galois representations modulo p and cohomology of Hilbert modular varieties. Preprint.

[9] M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms*. Progr. Math. 55, Birkhäuser, Boston, MA, 1985.

[10] G. Faltings, Crystalline cohomology and p-adic Galois representations. In *Algebraic analysis, geometry, and number theory*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989, 25–80.

[11] G. Faltings and C.-L. Chai, *Degeneration of Abelian Varieties*. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 22, Springer-Verlag, Berlin 1990.

[12] E. Freitag, *Hilbert Modular Forms*. Springer-Verlag, Berlin 1990.

[13] E. Goren, *Lectures on Hilbert modular varieties and modular forms*. CRM Monograph Ser. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[14] H. Hida, Irreducibility of Generalized Igusa Towers. Preprint.

[15] —, p-Adic Automorphic Forms on Shimura Varieties. Springer-Verlag, to appear.

[16] —, p-adic L-functions for base change lifts of GL_2 to GL_3. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Vol. II (Ann Arbor), Perspect. Math. 11, Acadademic Press, Boston, MA, 1990, 93–142.

[17] —, On nearly ordinary Hecke algebras for GL_2 over totally real fields. In *Algebraic Number Theory*, Adv. Stud. Pure Math. 17, Academic Press, Boston, MA, 1989, 139–169.

[18] —, On the Critical Values of L-Functions of GL_2 and $GL_2 \times GL_2$. *Duke Math. J.* **74** (1994), 431–529.

[19] —, Control Theorems of Coherent Sheaves on Shimura Varieties of PEL-type. *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), 1–76.

[20] L. Illusie, Réduction semi-stable et décomposition de complexes de de Rham à coefficients. *Duke Math. J.* 60 (1990), 139–185.

[21] J. Jantzen, *Representations of algebraic groups*. Pure and Appl. Math. 131, Academic Press, Boston, MA, 1987.

[22] N. Katz and T. Oda, On the differentiation of De Rham cohomology classes with respect to parameters. *J. Math. Kyoto Univ.* **8** (2) (1968), –213.

[23] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings I*. Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag, 1973.

[24] K. Künnemann, Projective Regular Models for Abelian Varieties, Semistable Reduction, and the Height Pairing. *Duke Math. J.* **95** (1998), 161–212.

[25] J. Kramer, An arithmetic theory of Jacobi forms in higher dimensions. *J. Reine Angew. Math.* **458** (1995), 157–182.

[26] J. Milne, *Étale Cohomology*. Princeton Math. Ser. 33, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980.

[27] A. Mokrane and J. Tilouine, Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and Applications. In *Cohomology of Siegel Varieties*, *Astérisque* **280** (2002), 1–95.

[28] D. Mumford, An Analytic Construction of Degenerating Abelian Varieties over Complete Rings. *Compositio Math.* **24** (1972), 239–272.

[29] D. Mumford and J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory*. Ergeb. Math. Grenzgeb. 34, Springer-Verlag, Berlin 1982.

[30] M. Rapoport, Compactification de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal. *Compositio Math.* **36** (1978), 255–335.

[31] K. Ribet, p-adic interpolation via Hilbert modular forms. In *Proc. Sympos. Pure Math.* 29, 1975, pp. 581–592.

[32] G. Shimura, On Eisenstein series of half-integral weight. Duke *Math. J.* **52** (1985), 281–314.

[33] —, On Hilbert modular forms of half-integral weight. *Duke Math. J.* **55** (1987), 765–838.

[34] G. van der Geer, *Hilbert Modular Surfaces*. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 16, Springer-Verlag, Berlin 19880.

[35] A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago VI, Actualités Sci. Ind. 1267, Hermann, Paris 1958.

[36] H.-T. Wu, On p-adic Hilbert modular adjoint L-functions. PhD thesis, UCLA, 2001.

[37] Yu. Zarhin, On equations defining moduli of abelian varieties with endomorphisms in a totally real field. *Trans. Moskow Math. Soc.* **42** (1981), 1–46.

Mladen Dimitrov, LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13, 99, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

E-mail: `dimitrov@math.univ-paris13.fr`

Jacques Tilouine, LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13, 99, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

E-mail: tilouine@math.univ-paris13.fr