UFR de Mathématiques — Master 2 Mention Mathématiques
Université Lille 1 — Analyse 2016-2017

Analyse Fonctionnelle : Feuille No. 3

Exercice 1 (1) (a) Montrer, à l'aide du lemme de Zorn, que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension infinie admet un supplémentaire (algèbrique).
(2) Soit $E = C[0,1]$, muni de la norme uniforme, M le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes et N un supplémentaire (algébrique) de M. Soit $\varphi : E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(f) = \sum_{j=0}^{d} j a_j$ si $f = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j \in M$, $\varphi(f) = 0$ si $f \in N$ et prolongée par linéarité ($\varphi(f) = \varphi(m)$ si $f = m + n$, avec $m \in M$ et $n \in N$).
Montrer que φ est linéaire et non continue sur E.
(3) Soit $g \in N,\ g \neq 0,$ fixé et $T : E \to E$ définie par $Tf = f - \varphi(f)g,\ \ f \in E$.
Montrer que T est linéaire, bijective et non continue.
(4) Définissons, pour $f \in E,\ \|f\|_T = \|Tf\|_\infty$
(a) Montrer que $f \mapsto \|f\|_T$ est une norme sur E et l'espace $(E, \|.\|_T)$ est complet.
(b) Les normes $\|.\|_T,$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 Soit E un espace normé et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une forme linéaire.
(1) Montrer que φ est continue $\iff$ $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé.
(2) Montrer que φ est disccontinue $\iff$ $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est dense dans E.

Exercice 3 Soit E un espace normé.
(I) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
(1) E est de dimension infinie ;
(2) Il existe un hyperplan de E, dense dans E ;
(3) il existe $\varphi : E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), forme linéaire non continue ;
(4) il existe M sous-espace de E propre et dense dans E ;
(5) il existe $T : E \to E$ automorphisme tel que $T \neq Id$ et $\mathrm{Ker}(T - Td)$ dense dans E ;
(6) il existe $\|.\|'$ une norme dans E non équivalente à $\|.\|$;
(7) il existe un automorphisme de E non continu.
(II) Montrer que si $(E, \|.\|)$ est Banach avec $\dim E = \infty$, alors il existe une norme $\|.\|'$ non équivalente à $\|.\|$ tel que $(E,\ \|.\|')$ Banach.

Exercice 4 Soit E un espace normé et A un sous-ensemble de E.
Mopntrer que si $\forall f \in E^*,\ \ f(A)$ est bornée dans $\mathbb{C}$, alors A est borné dans E.
(On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus).

Exercice 5 Soit E un espace normé séparable (i.e il existe $(x_n)_n \subset E$, dense dans E).
(1) Soit M un sous-espace fermé de E.
(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n \in E^*$ tel que $f_{n|M} = 0$, $\|f_n\| \leq 1$ et $f_n(x_n) = d(x_n, M)$.
(b) Montrer que $d(x, M) = \sup_n |f_n(x)| \quad \forall x \in E$.
(c) En déduire que $M = \cap_n Ker(f_n)$.
(2) Montrer que $\exists (f_n)_n \subset B_{E^*}(0,1)$ tel que

$$\|x\| = \sup_n |f_n(x)|, \ \forall x \in E \quad \text{et} \quad \cap_{n\geq 1} Ker(f_n = \{0\}.$$

Exercice 6 Soit $T : E \mapsto F$ linéaire, où E et F sont des espaces de Banach.
Montrer que T est continue si et seulement si pour tout $f \in F^*$ on ait $f \circ T \in E^*$.

Exercice 7 Soit $f, f_1, \cdots, f_n$ des formes linéaires sur un espace vectoriel E, $f \not\equiv 0$.
(1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) il existe $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$;
(ii)il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C \max_k |f_k(x)|$ pour tout $x \in E$;
(iii)$\cap_{k=1}^n \ker(f_k) \subset \ker(f)$.
(2) Soit E un espace vectoriel de dimension infinie et $f_1, \cdots, f_n$ des formes linéaires sur E.
Montrer que il existe $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ tel que $f_i(x_0) = 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

Exercice 8 Montrer que $c_0^* \simeq \ell^1$, $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$ et $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$ pour $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercice 9 Soit $E = \ell^\infty$ et c le sous-espace constitué des suites complexes convergentes, munis de la norme $||.||_\infty$.
a) Montrer que f définie sur c par $f(x) = \lim x_n$ est une forme linéaire continue sur c et calculer sa norme.
b) En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer alors que ℓ^1 n'est pas réflexif, c'est-à-dire, $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$.

Exercice 10 Montrer que $E = \ell^\infty$ n'est pas séparable.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-ensemble quelconque de E. On pose

$$M^\perp = \{f \in E^* : f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in M\}.$$

a) Montrer que $M^\perp$ est un sous-espace fermé de E^*.
b) Soit M un sous-espace vectoriel de E,
(i) Montrer que $\overline{M} = \{x \in E : f(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad f \in M^\perp\}$.
(ii) En déduire que M est dense dans E si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.

Exercice 12 *(1) Soit* $E = \ell^1(\mathbb{N})$ *et* $M = \{(x_n)_n \in E;\ \ x_{2n+1} = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$.
Montrer que toute forme linéaire continue sur M *admet une infinité d'extention Hahn-Banach sur* E.
(2) Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ *et* $M = c_0(\mathbb{N})$. *Alors* $c_0(\mathbb{N})$ *est sous-espace fermé de* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ *pour la norme* $\|.\|_\infty$.
Montrer que toute forme linéaire continue sur $c_0(\mathbb{N})$ *admet une unique d'extention Hahn-Banach sur* $\ell^1(\mathbb{N})$.
(3) Soit E *un espace normé et* M *un sous-espace de* E. *Soit* $f : M \to \mathbb{K}$ *une forme linéaire continue. Supposons qu'il existe* F_1, F_2 *deux extentions Hanh-Banach de* f.
Montrer que $\forall t \in [0,1],\ \ F_t = tF_1 + (1-t)F_2$ *est aussi une extention Hahn-Banach de* f. *Autrement dit l'ensemble des extentions Hahn-Banach de* f *forme un convexe dans* E^*.