UFR de Mathématiques
Université Lille 1

Master 2 Mention Mathématiques
Analyse 2016/2017

Analyse Fonctionnelle : Feuille No. 2

Exercice 1 Dans cet exercice, on utilise les notations de l'Exercice 5, Feuille 1.
Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace fermé de E et E/M l'espace quotient et pour $\overline{x} \in E/M$, $N(\overline{x}) = d(x, M) := \inf\{\|x - y\|;\ y \in M\}$ la norme dans E/M.
Soit $\Pi : E \to E/M$, la surjection canonique.
(1) Montrer que Π est linéaire continue et calculer sa norme.
(2) (a) Montrer que $\Pi(B_E(0,1)) = B_{E/M}(0,1)$.
(b) En déduire que Π est une application ouverte.

Exercice 2 a) Soit E est un espace normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si l'intérieur de F est non-vide alors $F = E$.

b) Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie ne possède pas de *base algébrique* dénombrable. En déduire que l'espace des polynômes $K[X]$ n'est complet pour aucune norme.

c) Soit $T : E \mapsto E$ une application linéaire et continue sur l'espace de Banach E. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $n = n(x) \geq 1$ tel que $T^n x = 0$. Montrer l'existence d'un nombre entier positif k tel que $T^k = 0$.

Exercice 3 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$E_n = \{x \in \mathbb{R};\ \text{ tel que } f^{(n)}(x) = 0\};\ \ \Omega = \cup_{n \geq 0} \mathring{E}_n \ \text{ et } \ F = \mathbb{R} \setminus \Omega.$$

1) Montrer que sur toute composante connexe de Ω f est un polynôme.
2) Montrer que f n'a aucun point isolé.
3) Montrer que $F = \emptyset$.
(Supposer que $F \neq \emptyset$, appliquer le Théorème de Baire et obtenir une contradiction).
4) En déduire que f est un polynôme.

Exercice 4 Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, qui sont nulle part dérivables, est dense dans $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.
Donner un exemple de fonction continue dérivables.

Exercice 5 Soit $x = (x_n)_n$ une suite de complexes telle que la série $\sum x_n y_n$ converge pour tout $y = (y_n)_n \in \ell^p$, $(1 \leq p \leq \infty)$. Il s'agit d'en déduire que $x \in \ell^q$ où q est l'exposant conjugué de p.

1. Pour tout entier N on définit une forme linéaire U_N sur ℓ^p par

$$U_N(y) = \sum_{n=0}^{N} x_n y_n.$$

Calculer la norme de U_N.

Indication: on pourra d'abord établir l'estimation

$$\|U_N\| \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

puis montrer que l'on a en fait égalité dans cette inegalité en considérant la suite

$$y = (\overline{x}_0 |x_0|^{q-2}, ..., \overline{x}_N |x_N|^{q-2}, 0, 0, ...).$$

2. Conclure en déduisant du théorème de Banach-Steinhaus que $x \in \ell^q$.

Exercice 6 Soit E, F, G des espaces normés. Soit $U : E \times F \to G$ une application bilinéaire.
(1) On suppose que U est séparément continue i.e.
$\forall x \in E$, l'application linéaire $y \mapsto U(x, y)$ est continue de F dans G; et
$\forall y \in F$, l'application linéaire $x \mapsto U(x, y)$ est continue de E dans G.
Montrer que si E ou F est complet alors U est continue.
(2) Soit $E = F = \ell^1(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $G = \mathbb{C}$.
Soit $U : \ell^1(\mathbb{N}) \times \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$U(x, y) = \sum_{n \geq 0} x_n y_n; \quad \text{où} \quad x = (x_n)_n,\ y = (y_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

(a) Montrer que l'application bilinéaire U est bien définie et séparément continue .
(b) Montrer que U n'est pas continue. Expliquer.

Exercice 7 Soient E et F deux espaces de Banach, et $G = \ell_\infty(F)$ l'espace vectoriel des suites bornées

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n \in F,$$

muni de la norme sup $\|x\|_\infty$.
(1) Montrer que G est un espace de Banach.
(2) Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F,telles que

$$\sup_n (\|T_n x\|_F) < \infty$$

pour tout $x \in E$. On note $U : E \mapsto G$, définie par $U(x) = (T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que le graphe de U est fermé.
(3) En déduire que le théorème de Banach-Steinhaus, dans le cas où les deux espaces E et F sont des espaces de Banach, peut être établi comme une conséquence du théorème du graphe fermé.

Exercice 8 Le but de cet exercice est d'établir l'existence de fonctions continues qui ne coïncident pas avec leur série de Fourier en un point donné.

Dans la suite on considère f une fonction continue $2\pi-$périodique, on note $\hat{f}(n)$ son n-ième coefficient de Fourier, $n \in \mathbb{Z}$, et $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}$ la N-ième somme partielle de Fourier.

1. Soit le noyau de Dirichlet
$$D_N(y) = \sum_{k=-N}^{N} e^{iny}$$
Montrer que
$$D_N(y) = \frac{sin(N+\frac{1}{2})y}{sin\frac{y}{2}}.$$

2. Soit $E = C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues $2\pi-$périodiques, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit la forme linéaire $L_N : E \to \mathbb{R}$ définie par $L_N(f) = S_N f(0)$. Montrer que
$$\|L_N\| = \|D_N\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|\, dy.$$

3. Montrer que $\|D_N\|_1 \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|sin\, u|}{u}\, du$.

4. En déduire qu'il existe f continue 2π–périodique telle que
$$\sup_{N\geq 1} |S_N f(0)| = \infty.$$

Exercice 9 (a) Soit X un espace de Banach. On suppose qu'il y a deux sous-espaces fermés Y et Z dans X tels que tout $x \in X$ possède une unique représentation $x = y + z$, avec $y \in Y$ et $z \in Z$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que si $x = y + z \in X$, avec $y \in Y$ et $z \in Z$, alors $\|y\| \leq C\|x\|$ et $\|z\| \leq C\|x\|$.

(b) Soit X un espace de Banach et $P : X \to X$ une application linéaire telle que $P^2 = P$. On suppose que l'image de P et le noyau de P sont des sous-espaces fermés. Montrer que P est continue.

Exercice 10 Soit $E = C([0,1])$, et $||.||$ une norme sur E pour laquelle E est un Banach. Supposons que, pour $f_n, f \in E$, $||f_n - f|| \to 0$ implique $f_n(t) \to f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Montrer que les normes $||.||$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes.