Chapitre 3

Théorèmes Fondamentaux

3.1 Théorème de Baire et ses conséquences

Théorème 3.1.1 (Théorème de Baire (1874-1932))
Si (E, d) est un espace métrique complet ($\neq \emptyset$), alors l'intersection de toute famille dénombrable de sous-ensembles ouverts et denses dans E est dense dans E.
(Autrement dit, si $(V_n)_n$ est une suite d'ensembles ouverts denses dans E, alors $\cap_n V_n$ est dense dans E).

Remarque 3.1.2 *Le Théorème de Baire affirme que l'intersection des V_n est dense. Cette intersection n'est pas nécessairement ouverte. Comme le montre l'exemple suivant :*
Exemple. *Soit l'espace métrique complet $\mathbb{R}$, $|.|$.*
Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{Q} = \{r_n; \quad n \geq 0\}$.
Soit $V_n = \mathbb{R} \setminus \{r_n\}$. Alors V_n est ouvert et dense dans $\mathbb{R}$. Par le Théorème de Baire

$$\cap_{n\geq 0} V_n = \cap_{n\geq 0}(\mathbb{R} \setminus \{r_n\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

est bien dense dans $\mathbb{R}$. Mais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, n'est ni ouvert ni fermé.

Un énoncé équivalent du Théorème de Baire

Théorème 3.1.3 *Si (E, d) est un espace métrique complet ($\neq \emptyset$), alors la réunion de toute famille dénombrable de sous-ensembles fermés de E, d'interieur vide est d'interieur vide.*
(Autrement dit, si $(A_n)_n$ est une suite d'ensembles fermés tel que pour tout n, $\mathring{A}_n = \emptyset$, alors $\overset{\circ}{\widehat{\cup_n A_n}} = \emptyset$).

Remarque 3.1.4 *(1) Souvent le Théorème de Baire est utilisé sous la forme suivante :*
Soit (E, d) est un espace métrique complet ($\neq \emptyset$). Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles de fermés de E tel que $E = \cup_n E_n$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{E}_{n_0} \neq \emptyset$.
(2) Sans l'hypothèse dénombrable, le Théorème de Baire peut être faux.
Exemple. *Soit l'espace métrique complet $(\mathbb{R}, |.|)$. Alors $\mathbb{R} = \cup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$, or $\{x\}$ est fermé d'intérieur vide par contre $\mathbb{R}$ n'est pas d'intérieur vide.*

Remarque 3.1.5 *(1) La conclusion du Théorème de Baire est appelée la* **propriété de Baire**. *Un espace topologique qui admet cette propriété est dit* **espace de Baire (ou espace de second catégorie)**.

Exercice 3.1 *Soit (E, d) est un espace métrique complet ($\neq \emptyset$). Montrer que :*
(1) Tout fermé de E est un espace de Baire.
(2) Tout ouvert de E est un espace de Baire.

Applications : Le Théorème de Baire est un outil très important en Analyse. Voici quelques exemples spectaculaires d'applications de ce Théorème.

Exercice 3.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)} = 0.$$

Montrer que f est un polynôme.

Exercice 3.3 *Soit $\Lambda([0, 1]) = \{f \in C([0, 1]);\ f$ est nulle part dérivable sur$[0, 1]\}$. Montrer que $\Lambda([0, 1])$ est dense dans $C([0, 1]), \|.\|_\infty$.*

Exercice 3.4 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues d'un intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$. Supposons qu'elle converge simplement vers f.*
(1) Montrer que f est continue sur un ensemble dense dans I.
(2) En déduire que si une fonction est dérivable alors sa dérivée est continue sur un ensemble dense.

Exercice 3.5 *(I) Soit E un espace de Banach. Montrer que*
E admet une base algèbrique dénombrable si et seulement si $dimE < \infty$.
(II) En déduire que $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$) l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas Banach pour aucune norme.

Exercice 3.6 *Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace de Banach des suites $x = (x_n)_n \subset \mathbb{C}$ bornées . E sera muni de la norme $\|.\|_\infty$.*
Soit $T : E \to \mathbb{C}$ une application linéaire vérifiant :

$$\forall x = (x_n)_n \in E,\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Tx = x_n.$$

(1) Montrer que T est continue et calculer sa norme.
(2) Pour $n \in \mathbb{N}$ posons $E_n = \{x \in E;\ Tx = x_n\}$. Montrer que E_n est un sous-espace fermé de E.
(3) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Tx = x_{n_0}$, $\forall x \in E$.

Sur les fonctions discontinues
Donnons d'abord quelques définitions :
• Soit E un espace topologique et A un sous-ensemble de E.
(1) On dira que A est un **ensemble** F_σ de E si il est réunion dénombrable de fermés de E.
(2) On dira que A est un **ensemble** G_δ de E si il est intersection dénombrable d'ouverts de E.

Remarque 3.1.6 *(1) A est un ensemble F_σ si et seulement si A^c est un ensemble G_δ.*
De même
(2) A est un ensemble G_δ si et seulement si A^c est un ensemble F_σ

• Soit E un espace topologique et $f : E \to \mathbb{R}$. Soit $x \in E$ et $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinage de x. On appelle **l'oscillation** de f en x la quantité suivante

$$w_f(x) = \inf_{V \in \mathcal{V}_x} \left\{ \sup_{y,z \in V} |f(y) - f(z)| \right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors
(1) f est continue en x si et seulement si $w_f(x) = 0$.
(2) f est discontinue en x si et seulement si $w_f(x) > 0$.

Remarque 3.1.7 *Dans le cas où E est un espace métrique, alors :*

$$w_f(x) = \inf_{\epsilon > 0} \left\{ \sup_{y,z \in B(x,\epsilon)} |f(y) - f(z)| \right\}.$$

Pour une fonction $f : E \to \mathbb{R}$, notons par $\mathcal{D}(f)$ l'ensemble des points de discontinuités de f.
Si $\mathcal{D}_n(f) = \{x \in E;\ w_f(x) \geq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1\}$, alors

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{D}_n(f).$$

Enfin notons par $\mathcal{C}(f) = \mathcal{D}(f)^c$, l'ensemble des points de continuités de f. On a le Théorème suivant :

Théorème 3.1.8 *Soit E un espace topologique et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors*
(1) $\mathcal{D}(f)$ est un ensemble F_σ.
(2) $\mathcal{C}(f)$ est un ensemble G_δ.

Preuve : Puisque $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{D}_n(f)$, il suffit de montrer que pour chaque $n \geq 1$, $\mathcal{D}_n(f)$ est fermé. Soit $x \notin \mathcal{D}_n(f)$, alors $w_f(x) < \frac{1}{n}$. Par définition $w_f(x)$, il existe $V \in \mathcal{V}_x$ tel que $\sup_{y,z\in V} |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$. Alors

$$\forall u \in V, \quad w_f(u) \leq \sup_{y,z\in V} |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}.$$

D'où, $V \subset \mathcal{D}_n(f)^c$ et donc $x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}_n(f)^c}}$. Puisque x est arbitraire dans $\mathcal{D}_n(f)^c$, on a montré que $\mathcal{D}_n(f)^c$ est un ouvert. et donc $\mathcal{D}_n(f)$ est un fermé. (2) s'obtient par passage au complémentaire.

Exercice 3.7 *(1) Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels n'est pas un ensemble F_σ de $\mathbb{R}$.*
(On pourra utiliser le Théorème de Baire).
(2) En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution (1) Supposons au contraire que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ avec A_n fermé. Alors

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = (\bigcup_{n\geq 1} A_n) \bigcup (\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\}).$$

Puisque $\mathbb{R}$ est un espace métrique complet, par le Théorème de Baire, il existe n_0, $\mathring{A}_{n_0} \neq \emptyset$ (on remarquera que $\overset{\circ}{\widehat{\{r\}}} = \emptyset$). D'où, il existe un intervalle ouvert $]a, b[\subset A_{n_0} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Contradiction, puisque par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.
(2) est une conséquence du Théorème 2.1.6 et la question précédente.

Exercice 3.8 *Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un ensemble G_δ de $\mathbb{R}$.*

• Exemples de fonctions discontinues :

(1) Soit $f = \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ i.e.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Alors $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ (autrement dit f n'a pas de points de continuités).
De même pour la fonction caractéristique de $f = \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = 1 - \chi_{\mathbb{Q}}$.

(2) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } \ x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \text{ avec la fraction } \frac{p}{q} \ \text{ est irréductible.} \end{cases}$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$;
i.e. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{Q}$ et $\mathcal{C}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors f est continue en 0 et discontinue sur $\mathbb{R}^*$;
i.e. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{C}(f) = \{0\}$.

3.2 Applications linéaires continues

Soit $E, \|.\|_E$ et $F, \|.\|_F$ deux espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire.

Définition 3.2.1 *Une application linéaire $T : E \to F$ est dite* **bornée** *si il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\|Tx\|_F \leq \alpha \|x\|_E.$$

Remarque 3.2.2 *Attention d'habitude, dans le cadre des fonctions, le terme "borné" traduit, pour une fonction f à valeurs réel ou complexe, $|f(x)| \leq \alpha$. Mais dans le cadre des applications linéaires, on a $\|Tx\|_F \leq \alpha, \quad \forall x \in E$ si et seulement si $T = 0$. En effet, puisque $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, on a pour tout $\lambda \neq 0, \quad \|Tx\|_F \leq \frac{\alpha}{|\lambda|}$.*

Théorème 3.2.3 *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) T est continue ;
(2) T est continue en un point de E ;
(3) T est continue en zéro ;
(4) T est bornée.

Lemma 3.2.4 *Soit $E, \|.\|_E$ et $F, \|.\|_F$ deux espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire. Soit les quantités suivantes :*

$$A = \inf\big\{\alpha > 0; \quad \|Tx\|_F \leq \alpha\|x\|_E,\ x \in E\big\}; \quad B = \sup\big\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},\ 0 \neq x \in E\big\};$$

$$C = \sup\big\{\|Tx\|_F;\ \ x \in E, \|x\|_E = 1\big\}; \quad D = \sup\big\{\|Tx\|_F;\ \ x \in E, \|x\|_E \leq 1\big\}.$$

Alors :
(i) $\|Tx\|_F \leq A\ \|x\|_E,\ x \in E.$
(ii) $A = B = C = D.$

Notons, pour $E, \|.\|_E$ et $F, \|.\|_F$ deux espaces normés :

$$L(E, F) = \{T : E \to F; \quad \text{application linéaire bornée}\}.$$

Alors $L(E, F)$ est un espace vectoriel et l'application

$$T \mapsto \|T\| = \sup\big\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},\ 0 \neq x \in E\big\},$$

est une norme sur $L(E, F)$ vérifiant :
(a) $\|Tx\|_F \leq \|T\|.\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$
(b) Si E, F, G des espaces normés et $T \in L(E, F)$ $S \in L(F, G)$, alors

$$\forall x \in E, \ \ \|STx\|_G \leq \|S\|.\|Tx\|_F \leq \|S\|.\|T\|\|x\|_E.$$

D'où, $ST \in L(E, G)$ et on a

$$\|ST\| \leq \|S\|.\|T\|.$$

(c) Quand $E = F$, on notera $L(E) = L(E, E)$.

• l'application linéaire $T \in L(E, F)$, souvent, sera appelée **opérateur**.

Exemple 3.2.5 *si $dim(E) < \infty$ et F espace normé, alors toute application linéaire $T : E \to F$ est bornée.*
En effet l'application $x \mapsto \|x\| = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ est une norme sur E. Puisque $dim(E) < \infty$, toute les normes sur E sont équivalentes. D'où $\exists \beta > 0$, $\|x\| \leq \beta\|x\|_E$. Par conséquent $\|Tx\|_F \leq (\beta - 1)\|x\|_E$, $\forall x \in E$ et donc T est bornée.

Exemple 3.2.6 *Soit* $E = C([0,1])$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *et* $k(.,.) \in C([0,1]\times[0,1])$. *Soit l'application linéaire* $T : E \to E$ *définie par*

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,t)f(t)dt, \quad f \in E.$$

Alors T *est continue et on a*

$$\|T\| = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|dt.$$

Puisque, $k(.,.)$ *est continue sur le compact* $[0,1]\times[0,1]$, *la fonction* $x \mapsto \int_0^1 k(x,t)f(t)dt$ *est continue sur* $[0,1]$. *D'où* $Tf \in E$, $\forall f \in E$.

D'autre part, $|Tf(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,t)|dt$. *D'où,* $T \in L(E)$ *et on a*

$$\|T\| \leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|dt.$$

Montrons l'autre inégalité. Puisque la fonction $x \mapsto \int_0^1 k(x,t)f(t)dt$ *est continue sur le compact* $[0,1]$, *elle atteint son maximum en un point* $x_0 \in [0,1]$. *Définissons la fonction :*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k(x_0,t)}{|k(x_0,t)|} & \text{si } k(x_0,t) \neq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Alors f *est intégrable (car mesurable et bornée) et* $\|f\|_1 = 1$. *Par la densité de* $C[0,1]$ *dans* $L^1[0,1]$, *il existe une suite* $(f_n)_n \subset C[0,1]$ *tel que* $\|f_n\|_\infty \leq 1$ *et converge vers* f *dans* $L^1[0,1]$. *Par conséquent,*

$$\|T\| \geq \|Tf_n\|_\infty \geq (Tf_n)(x_0) \to \int_0^1 k(x_0,t)f(t)dt.$$

d'où

$$\|T\| \geq \int_0^1 k(x_0,t)f(t)dt = \int_0^1 |k(x_0,t)f(t)|dt = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|dt.$$

Finalement on obtient le résultat annoncé.

Exemple 3.2.7 *Soit* $E = C([0,1])$ *et soit l'application linéaire* $T : E \to \mathbb{C}$ *définie par* $Tf = f(1)$. *Alors*

(a) T *est bornée, si* $C([0,1])$ *est muni de la norme* $\|.\|_\infty$.

(b) T *n'est pas bornée si* $C([0,1])$ *est muni de la norme* $\|.\|_p$.

En effet, pour (a), $|Tf| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$. *D'où* T *est bornée et* $\|T\| \leq 1$ *(on a* $\|T\| = 1$*).*

Pour (b) Supposons que T est bornée alors $\exists \beta > 0,\ \ |Tf| \leq \beta \|f\|_p,\ \ \forall f \in C([0,1])$. Donc pour $f_n(t) = t^n$, on obtient :

$$1 \leq \beta \frac{1}{(np+1)^{\frac{1}{p}}} \to 0, \quad quad\ \ n \to +\infty,$$

ce qui est absurde et donc T n'est pas bornée.

Remarque 3.2.8 *Une question naturelle se pose, est-ce le* sup *dans la définition de la norme d'un opérateur est atteint ? c'est-à-dire, pour $T \in L(E,F), \exists?\ \ x_0 \in E,\ \|x_0\| \leq 1$ tel que $\|T\| = \|Tx_0\|$. La réponse, en général, est non comme le montre l'exemple suivant :*

Exemple 3.2.9 *Soit $E = C_0(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n \subset \mathbb{C};\ \ \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}\}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit $T : E \to \mathbb{C}$ définie par*

$$Tx = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{2^n},\ \ x = (x_n)_n \in C_0(\mathbb{N}).$$

Alors T est linéaire et on a :

$$|Tx| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{|x_n|}{2^n} \leq \|x\|_\infty \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \|x\|_\infty.$$

D'où, $T \in L(E,\mathbb{C})$ et $\|T\| \leq 1$.
D'autre part, pour $n \geq 1$, $\|e_1 + ... + e_n\|_\infty = 1$ et
$T(e_+... + e_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Donc $\|T\| \geq 1 - \frac{1}{2^n}$.
Comme $n \geq 1$ est arbitraire, on obtient $\|T\| \geq 1$. Par conséquent $\|T\| = 1$.
Maintenant si $x = (x_n)_n \in C_0(\mathbb{N})$ avec $\|x\|_\infty \leq 1$, alors il existe $N \geq 1$ tel que $\forall n \geq N,\ \ |x_n| < \frac{1}{2}$ (car $x_n \to 0$). D'où

$$|Tx| \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < 1 = \|T\|.$$

Donnons un exemple d'un opérateur dont la norme est atteinte.

Exemple 3.2.10 *Soit $E = \ell^1(\mathbb{N})$ et $T : E \to \mathbb{C}$ définie par*

$$Tx = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n},\ \ x = (x_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

Alors T est linéaire et $\|T\| = 1$. Maintenant pour $e_1 = (1, 0, ...,)$ on a $Te_1 = 1$ et donc $\|T\| = Te_1 = 1$.

Théorème 3.2.11 *Soit E, F deux espaces normés.*
Si F est complet alors $L(E, F)$ est complet.

Puisque l'espace $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet, on a le résultat suivant

Corollaire 3.2.12 *Soit E un espace normé et $E^* = L(E, \mathbb{K})$,* **l'espace dual topologique** *de E. Alors E^* est complet.*

Exercice 3.9 *$E = C([0,1])$ et soit l'application $T : E \to E$ définie par $Tf(x) = \int_0^1 \exp(x+t) f(t) dt$.*
(1) Calculer la norme de T.
(2) Déterminer l'image, $Im(T)$, et le noyau, $Ker(T)$, de T.

Exercice 3.10 *Soit $T : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ une application linéaire vérifiant :*

$$f, g \in C(\mathbb{R}), \quad f = g \ \text{ sur } \ [a,b], \ a < b \implies Tf = Tg \ \text{ sur } \ [a,b].$$

Monter qu'il existe $h \in C(\mathbb{R})$ tel que $Tf = h.f, \ \forall f \in C(\mathbb{R})$.
(On pourra montrer d'abord que si $f(x_0) = 0$ alors $T(f)(x_0) = 0$).

Solution : (i) Supposons que $f(x_0) = 0$ et montrons que $T(f)(x_0) = 0$. Posons :

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \ x < x_0 \\ 0 & \text{si } \ x \geq x_0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \leq x_0 \\ f(x) & \text{si } \ x > x_0. \end{cases}$$

Alors

$$f = g_1 + g_2; \quad T(g_1)(x) = 0, \ \forall x > x_0; \quad T(g_2)(x) = 0, \ \forall x \leq x_0.$$

Par continuité de $T(g_1)$, $\quad T(g_1)(x_0) = 0$ de même $T(g_2)(x_0) = 0$.
D'où $T(f)(x_0) = T(g_1)(x_0) + T(g_2)(x_0) = 0$.
(ii) Soit $f_0(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et soit $h = T(f_0)$. Alors $h \in C(\mathbb{R})$ et $\forall f \in C(\mathbb{R}), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ (f - f_0.f)(x) = 0$. Par (i), $T(f)(x) = h(x).f(x)$.

Exercice 3.11 *Soit E, F deux espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire.*
Montrer que si le noyau, $Ker(T)$, de T est fermé et l'image, $Im(T)$, de T est de dimension finie, alors T est continue.

Exercice 3.12 *Soit K un espace compact et $E = C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Une fonction $f \in E$ est dite positive ($f \geq 0$) si $f(x) \geq 0$ pour chaque $x \in K$. Soit $T : E \to E$ une application linéraire telle que $f \geq 0$ implique $Tf \geq 0$. Dans ce cas on notera $T \geq 0$.*

(a) Montrer que

$$T|f| \geq |Tf| \iff T \geq 0$$

où $|f|(x) = |f(x)|$.

(b) En déduire que T est continue et calculer sa norme.

Solution : (a) Supposons que T est positive.
Puisque $|f| - f \geq 0$, $T(|f| - f) \geq 0$ et donc $T|f| \geq Tf$. De même, puisque $|f|+f \geq 0$, $T(|f|-f) \geq 0$ et donc $T|f| \geq -Tf$. Par conséquent $T|f| \geq |Tf|$.

Réciproquement. Soit $f \geq 0$ alors $f = |f|$. D'où par hypothèse, $Tf = T|f| \geq |Tf| \geq 0$ (i.e. $T \geq 0$).

(b) Soit $\mathbb{1}(x) = 1$, $\forall x \in K$. Puisque $\forall f \in C(K, \mathbb{R})$, $|f| \leq \|f\|_\infty \mathbb{1}$. Donc, si $T \geq 0$, $T|f| \leq \|f\|_\infty T\mathbb{1}$. Par (a), on a $\forall f \in C(K, \mathbb{R})$, $|Tf| \leq \|f\|_\infty T\mathbb{1}$. Donc, si $T\mathbb{1} = 0$ alors $Tf = 0$, $\forall f \in C(K, \mathbb{R})$ et $T = 0$. Si $T \neq 0$ alors $T\mathbb{1} > 0$. D'où $\|Tf\|_\infty \leq \|T\mathbb{1}\|_\infty \|f\|_\infty$. Donc T est continue et on a $\|T\| \leq \|T\mathbb{1}\|_\infty$. D'autre part, puisque $\|\mathbb{1}\|_\infty = 1$, $\|T\mathbb{1}\|_\infty \leq \|T\|$. Par conséquent $\|T\| = \|T\mathbb{1}\|_\infty$.

3.3 Conséquences du Théorème de Baire

- **Théorème de Banach-Steinhaus**

Théorème 3.3.1 (Théorème de Banach-Steinhaus)
Soit E un espace de Banach et F un espace normé. Soit $A \subset L(E, F)$. Alors on a :

$$\sup_{T \in A} \|T\| < \infty;$$

ou bien
il existe un sous ensemble W dense dans E (i.e. $W = \cap_{n \geq 1} U_n$ avec U_n ouvert dense dans E) tel que

$$\sup_{T \in A} \|Tx\| = +\infty, \quad \forall x \in W.$$

Le Théorème de Banach-Steinhaus est souvent présenté sous la forme suivante conséquence directe du Théorème précédent.

Théorème 3.3.2 (Théorème de Banach-Steinhaus)
Soit E un espace de Banach et F un espace normé. Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in I} \subset L(E, F)$ (I non nécessairement dénombrable). On suppose que :

$$\forall x \in E, \ \exists M_x > 0, \quad \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq M_x < \infty.$$

Alors

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| < \infty$$

(autrement dit, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq M\|x\|$).

Puisque toute suite convergente est bornée, on a comme conséquence du Théorème précédent, le Corollaire suivant :

Corollaire 3.3.3 *Soit E un espace de Banach et F un espace normé. Soit $(T_n)_{n\geq 1} \subset L(E,F)$, tel que $\forall x \in E$, $T_n x$ converge vers une limite Tx. Alors*
(1) $\sup_{n\geq 1} \|T_n\| < \infty$.
(2) $T \in L(E,F)$.

Remarque 3.3.4 *(1) Le Corollaire précédent dit que : une limite simple T d'une suite $(T_n)_n$ d'applications linéaires continues d'un espace de Banach dans un espace normé, est linéaire continue.*
(2) **Attention** $\|T_n - T\| \nrightarrow 0$, *en général.*
(La convergence n'est pas forcement uniforme).
Exemple : *Soit $E = \ell^1(\mathbb{N})$, $\|.\|_1$ et $F = \mathbb{C}$, $|.|$.*
Soit $T_n : E \to F$ définie par $T_n(x) = x_n$, $\quad x = (x_n)_n$. Alors

$$|T_n(x)| = |x_n| \leq \sum_{k\geq 1} |x_k| = \|x\|_1.$$

Donc $\forall n \geq 1$, $T_n \in L(E,F)$ et $\|T_n\| \leq 1$.
D'autre part, $|T_n(e_n)| = 1 \leq \|T_n\| \leq 1$. Donc $\|T_n\| = 1$.
Puisque $\forall x \in \ell^1(\mathbb{N})$, $T_n(x) = x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, $\quad T_n(x) \to T(x)$ avec $T = 0$. Donc T_n convergent simplement vers $T = 0$.
Par contre $\|T_n - T\| = \|T_n\| = 1 \nrightarrow 0$.
(3) Sans l'hypothèse "E espace de Banach", le Théorème de Banach-Steinhauss, peut être faux.
Exemple : $E = C_{00}(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n \subset \mathbb{C};\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ x_n = 0,\ \ \forall n \geq N\}$ *muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un espace normé. Soit $T_n : E \to \mathbb{C}$ définie par $T_n(x) = \sum_{k=1}^n kx_k$, $x = (x_n)_n \in E$. Alors*

$$|T_n(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^n k\right) \|x\|_\infty \quad \textit{D'où} \quad T_n \in L(E,\mathbb{C}).$$

D'autre part,

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} T_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx_k.$$

Cette série ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Donc la suite $(T_n(x))_n$ est bornée pour tout $x \in E$, par conséquent les hypothèses du Théorème de Banach-Steinhauss sont vérifiées, par contre la conclusion n'est pas vérifiée. En effet si $x = (x_n)_n \in C_{00}(\mathbb{N})$ avec $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$ et $x_k = 0$, $\forall k \geq n$, alors $\|T_n\| \geq \|T_n x\| = \sum_{k=1}^n k \geq n$.
Explication : L'espace normé $(C_{00}(\mathbb{N}), \|.\|_\infty)$ n'est pas complet.

- **Théorème de l'application ouverte**

Définition 3.3.5 *E, F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une fonction. f est dite* **ouverte** *si l'image d'un ouvert de E est un ouvert de F.*

Remarque 3.3.6 *Rappelons que une fonction f est continue si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E (i.e. si U est un ouvert de F, $f^{-1}(U) = \{x \in E;\ f(x) \in U\}$ est un ouvert de E.*

Dans le cas des espaces normés, on a la caractérisation des applications linéaires ouvertes :

Proposition 3.3.7 *Soit E, F deux espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) T est ouverte ;
(2) $\exists \delta > 0$ tel que $B_F(0, \delta) \subseteq T(B_E(0, 1))$;
(3) $\exists M > 0$ tel que $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, tel que $y = Tx$ et $\|x\| \leq M.\|y\|$.

Théorème 3.3.8 (Application Ouverte)
Soit E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$ surjective, alors T est ouverte.

Remarque 3.3.9 *La réciproque du Théorème de l'application ouverte est vraie même avec seulement l'hypothèse E, F espaces normés.*

Théorème 3.3.10 (Isomorphisme de Banach)
Soit E, F deux espaces de Banach. Si $T \in L(E, F)$ bijective alors $T^{-1} \in L(F, E)$.
(Autrement dit si T est linéaire bijective continue alors T est bi-continue).

Corollaire 3.3.11 (Equivalence des normes)
Supposons que $(E, \|.\|_1,\ \|.\|_2)$ est un espace de Banach pour les deux normes. Si $\exists \alpha > 0$ tel que $\|x\|_2 \leq \alpha \|x\|_1$, $\forall x \in E$, alors les deux normes sont équivalentes.

Théorème 3.3.12 (Graphe fermé)
Soit E, F deux espaces de Banach. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Si le graphe de T, $G(T) = \{(x, Tx);\ x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

Remarque 3.3.13 *(1) La réciproque du Corollaire précédent est toujours vraie, même pour T non linéaire.*

(2) Soit $E = C_{00}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit $T : E \to E$ définie par $T((x_n)_n) = (\frac{1}{n} x_n)_n$, $n \geq 1$. Alors $T \in L(E)$, bijective, $T^{-1}((x_n)_n) = (n x_n)_n$ n'est pas continue. Donc le Théorème Isomorphisme de Banach, est faux si E n'est pas complet.

Remarque 3.3.14 *Dans la présentation des résultats de cette section, nous montrons que : Théorème Application Ouverte (Théorème 3.3.8) $\Longrightarrow$ Théorème Isomorphisme de Banach (Théorème 3.3.10) $\Longrightarrow$ Théorème du graphe fermé (Théorème 3.3.12).*

En faite les trois Théorèmes sont équivalents. En effet :

(1) Pour montrer que Théorème du graphe fermé $\Longrightarrow$ Théorème d'Isomorphisme de Banach, il suffit de remarquer que si T est linéaire et bijective alors le graphe de T est fermé si et seulement si le graphe de T^{-1} est fermé.

(2) Pour montrer que Théorème Isomorphisme de Banach $\Longrightarrow$ Théorème de l'Application Ouverte, on utilise la factorisation $T = S \circ \Pi$ via le quotient de E sur $Ker(T)$. Alors Π est ouverte et S continue injective. De plus si T est surjective alors S est bijective. Par le Théorème Isomorphisme de Banach, S^{-1} est continue. Donc si $\Omega \subseteq E$ est un ouvert, alors

$T(\Omega) = S(\Pi(\Omega)) = (S^{-1})^{-1}(\Pi(\Omega))$ est ouvert puisque $\Pi(\Omega)$ est un ouvert et S^{-1} est continue.

Exercice 3.13 *Soit $E = \ell^2$ et $F = C_{00}$ le sous-espace constitué des suites à support fini. Soit $T_n : F \to E$ définie sur la suite $x = (x_i)_i$ par*

$$(T_n(x))_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ nx_n & \text{si } i = n \end{cases}$$

Montrer que $(T_n)_n$ vérifie les hypothèses du théorème de Banach-Steinhaus mais pas la conclusion. Pourquoi ?

Exercice 3.14 *Soit $E = C^1([0,1])$ et $F = C([0,1])$, munis de la norme $||.||_\infty$. Soit $T : E \to F$ défini par $Tf = f'$ et $G(T)$ le graphe de T.*

a) Montrer que $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

b) Montrer, en considérant la suite $f_n(x) = x^n$, que T n'est pas continue. Expliquer.

Exercice 3.15 *Soit E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$.*
(1) Montrer que T est surjective si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, tel que $y = Tx$ et $\|x\| \leq M.\|y\|$.
(2) En déduire que l'ensemble $S(E, F) = \{T \in L(E, F);\quad \text{surjective}\}$ est ouvert dans $L(E, F)$.

Exercice 3.16 *Soit E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$.*
(1) Montrer que T est injective à image fermée si et seulement si $\exists \beta > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|x\| \leq \beta\|Tx\|$.
(2) En déduire que l'ensemble $I(E, F) = \{T \in L(E, F);\quad \text{injective à image fermée}\}$ est ouvert dans $L(E, F)$.

Exercice 3.17 *(I) Soit F un espace normé. Montrer que F est complet si et seulement si $\forall (x_n)_n \subset F,\ \|x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ alors $\sum_n x_n$ converge dans F.*

(II) Soit E un espace de Banach, F un espace normé et $T \in L(E,F)$ surjective. Montrer que F est complet si et seulement si T est ouverte.
(On pourra utiliser la Proposition 3.3.7 et (I)).

Solution. (I) Si F est complet alors toute suite normalement convergente (i.e $\sum_n \|x_n\| < \infty$) est convergente (i.e $\sum_n x_n$ est convergente). Réciproquement. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans F. Pour montrer que $(u_n)_n$ est convergente il suffit de trouver une sous-suite de $(u_n)_n$ convergente. puisque $(u_n)_n$ est de Cauchy, on a

pour $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}},\ \exists \varphi(k) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq \varphi,\ \|u_p - u_{\varphi(k)}\| < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Posons $x_1 = u_{\varphi(1)},\ x_k = u_{\varphi(k)} - u_{\varphi(k-1)} \quad \forall k > 1$.

Alors $\|x_k\| < \frac{1}{2^k} \quad \forall k > 1$. Par hypothèse $\sum_k x_k$ converge. Mais $u_{\varphi(k)} = \sum_{j=1}^{k} x_j$. Donc la $(u_n)_n$ admet une sous-suite $(u_{\varphi(k)})_k$ converte par conséquent la suite $(u_n)_n$ est convergente et donc F est complet.

(II) Si F est complet, par le Théorème de l'application ouverte, T est ouverte.

Réciproquement, Soit $(y_n)_n$ une suite de F tel que $\|y\| < \frac{1}{2^n} \ \forall n$. Montrons que $\sum_n y_n$ est convergente.

Supposons que T est ouverte, par Proposition 3.3.7, $\exists M > 0$ tel que $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ avec y = Tx et $\|x\| \leq M.\|y\|$.

On a alors $\forall n \geq 1,\ \exists x_n \in E,$ tel que $y_n = Tx_n$ et $\|x_n\| \leq \frac{M}{2^n}$. Puisque E est complet, $\sum_n x_n$ est convergente. Comme T est continue, $\sum_n y_n$. Finalement, en appliqant (I), F est complet.