Chapitre 2

Espace des fonctions continues sur un compact

Soit K un espace métrique compact et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{K};\ \ \textit{continue}\ \} \quad \textit{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Alors $(C(K), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Si on définit le produit $(f.g)(x) = f(x).g(x),\ f, g \in C(K)$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in C(K),\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, alors $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ et $(C(K), \|.\|_\infty)$ est une algèbre de Banach.

Remarque 2.0.1 *Soit $(f_n)_n \subset C(K)$ et $f : K \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ alors $f \in C(K)$.*
Convergence uniforme, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Notons que

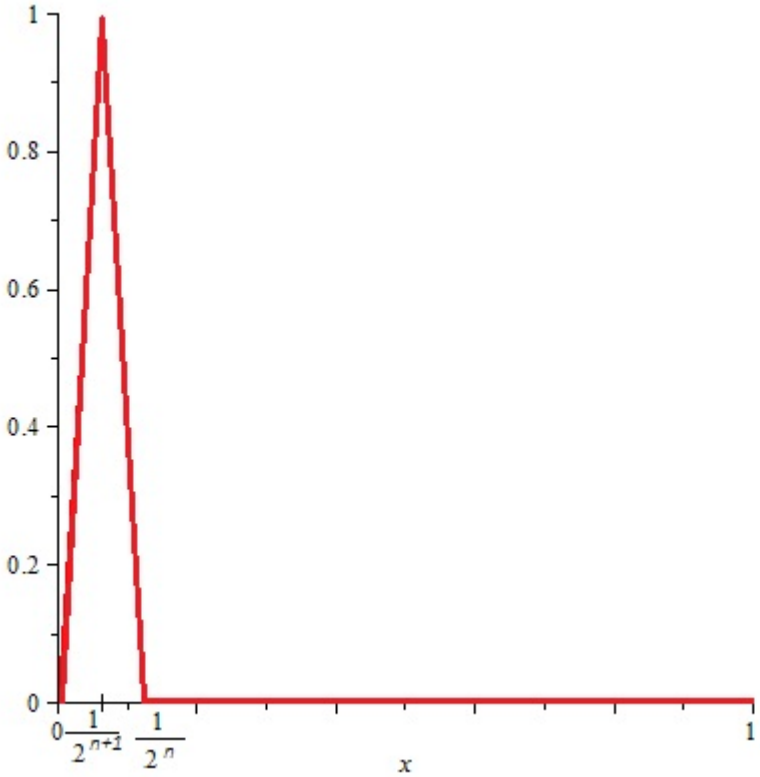
$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \iff |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in K.$$

D'où la convergence uniforme implique la convergence simple.
La réciproque n'est pas vraie en général :

Exemple 1. *$K = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Pour chaque $x \in [0, 1]$ la suite $(f_n(x))_n$ converge et $f_n \to f$ simplement où $f(x) = 1$ si $x = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 1$. Alors $f \notin C([0, 1])$. Donc pas de convergence uniforme.*

Exemple 2. *Soit $K = [0, 1]$ et*

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x & si\ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n+1}x + 2 & si\ \ \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^n}, \\ 0 & \frac{1}{2^n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Alors $f_n \to f = 0$ simplement, par contre $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 1 \nrightarrow 0$. Donc pas de convergence uniforme.

Théorème 2.0.2 **(Lemme de Dini)** *Soit K un espace métrique compact et $(f_n)_n \subset C(K, \mathbb{R})$ une suite* **monotone**. *Supposons que f_n converge simplement vers $f \in C(K, \mathbb{R})$. Alors la convergence est uniforme.*

2.1 Théorème d'Ascoli

Définition 2.1.1 **(Equicontinuité)** *Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et H une partie de $C(E, F)$. On dira que H est* **équicontinue en** x_0 *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ tel\ que\ d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon,\ \forall f \in H.$$

Le point important, δ ne dépend pas de f.

On dira que H est **équicontinue** *si elle est équicontinue en tout point de E.*

Exemple 1 *Supposons $\exists c > 0, \alpha > 0$ tel que*

$$d'(f(x), f(y)) \leq c(d(x,y))^{\alpha} \quad \forall x, y \in E,\ \forall f \in H,$$

Alors H est équicontinue.

Exemple 2 *Soit $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_{\infty}$ et $H = \{f \in C^1([0,1]);\ \|f'\|_{\infty} \leq 1\}$. Alors H est équicontinue.*

Remarque 2.1.2 *Tout ensemble fini de fonctions continues en un point x_0 (resp. dans E) est équicontinu en x_0 (resp. équicontinu).*

Exercice 2.1 *Soit K un espace métrique compact et F un espace métrique. Soit $(f_n)_n$ une suite de $C(K,F)$ tel que $H = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit équicontinue. Supposons que f_n converge simplement vers f.*
Montrer que la convergence est uniforme.
En particulier f est continue.

Solution : *Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, H est équicontinue, $\forall x \in K$, $\exists B(x,\alpha)$, tel que $\forall y \in B(x,\alpha)$ on ait $d(f_n(x), f_n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
Comme, $K = \cup_{x \in K} B(x,\alpha)$ compact, il existe un recouvrement fini de K. Soit $K = \cup_{i=1}^{p} B(x_i, \alpha_i)$. Alors, par la convergence simple, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, on ait $d(f(x_i), f_n(x_i)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall i = 1 \cdots p$.
Puisque $K = \cup_{i=1}^{p} B(x_i, \alpha_i)$, $\forall x \in K$, $\exists i$ tel que , $d(f_n(x), f_n(x_i)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient $d(f(x), f(x_i)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. D'où finalement, pour tout $x \in K$,

$$d(f(x), f_n(x)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f_n(x)) \leq \varepsilon.$$

D'où la convergence uniforme. f est continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

Sans l'hypothèse "l'espace de départ est compact", la conclusion de l'exercice précédent est fausse, comme le montre l'exemple suivant

Exercice 2.2 *Soit $E = C([0,+\infty[)$ et*

$$H = \{f_n \in E;\ f_n(x) = \sin(\sqrt{x + 4n^2\pi^2}),\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in [0,+\infty[\} \subset E.$$

(1) Montrer que H est équicontinue.
(2) Montrer que f_n converge simplement vers la fonction nulle.
(3) Montrer que la convergence n'est pas uniforme dans E.

Solution *(1)* $f_n'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+4n^2\pi^2}}\cos\sqrt{x+4n^2\pi^2}$. *D'où*

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+4n^2\pi^2}} \leq \frac{1}{4\pi}.$$

Donc

$$\forall x, y \in [0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{4\pi}|x-y|.$$

D'où l'équicontinuité de H.
(2) Pour $x \in [0, +\infty[$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$f_n(x) = \sin(\sqrt{x+4n^2\pi^2}) = \sin(2n\pi\sqrt{1+\frac{x}{4n^2\pi^2}}) =$$

$$\sin(2n\pi + \frac{x}{4n\pi} + o(\frac{1}{n})) = \sin(\frac{x}{4n\pi} + o(\frac{1}{n})) = \frac{x}{4n\pi} + o(\frac{1}{n})$$

Donc f_n *converge simplement vers la fonction nulle.*
(3) Posons, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2 \in [0, +\infty[$ *et* $f_n(x_n) = 1$. *Alors,* $\|f_n\|_\infty = 1$ *et si on pose* $f = 0$ *alors* $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 1 \nrightarrow 0$. *Donc la convergence n'est pas uniforme.*

Sans l'hypothèse "l'espace de départ est compact", mais avec" l'équicontinuité, nous avons le résultat suivant.

Exercice 2.3 *Soit* (E, d) *et* (F, d') *deux espaces métriques. Soit* $(f_n)_n$ *une suite de* $C(E, F)$ *tel que* f_n *converge simplement vers* f. *Supposons que* $H = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *soit équicontinue en* x_0 *(resp. équicontinue).*
Montrer que f *est continue en* x_0 *(resp. continue sur* E*).*

Solution : *En effet, Soit* $\varepsilon > 0$, *alors il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d'(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque la dernière inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, *par passage à la limite quand* $n \to \infty$, *on obtient la continuité de* f *en* x_0.

Théorème 2.1.3 **(Ascoli (1883))** *Soit* K *un espace métrique compact et* F *un espace métrique complet. Soit* H *une partie de* $C(K, F)$. *Alors,*
H *est relativement compacte dans* $C(K, F)$ *si et seulement si* H *est équicontinue et* $\forall x \in K,\ H(x) = \{f(x);\ f \in H\}$ *est relativement compacte dans* F.

Puisque dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, les parties relativement compacte sont des parties bornées, on a :

Corollaire 2.1.4 **(Ascoli)** *Soit K un espace métrique compact et H une partie de $C(K)$. Alors H est relativement compacte dans $C(K)$ si et seulement si H est équicontinue et $\forall x \in K,\ H(x) = \{f(x);\ f \in H\}$ est bornée.*

Remarque 2.1.5 *Le Théorème d'Ascoli, n'est pas vrai sans l'hypothèse "K compact.*
Soit $E = C_b[0, +\infty[= \{f \in C([0, +\infty[);\ \ bornée\}$, alors $E, \|.\|_\infty$ est un espace de Banach. Soit $H = \{f_n \in E;\ f_n(x) = \sin(\sqrt{x + 4n^2\pi^2}),\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in [0, +\infty[\}$. Alors H est équicontinue et $H(x)$ est borné pour tout $x \in [0, +\infty[$. Mais H n'est pas relativement compacte dans $E, \|.\|_\infty$.

2.2 THEOREME DE STONE-WEIERSTRASS

Soit K un espace métrique compact et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $C(K) = \{f : K \to \mathbb{K};\ \ continue\ \}$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|,\ f \in C(K),$$

est un espace vectoriel normé complet, stable par le produit ponctuelle :

$$(fg)(t) = f(t).g(t), \quad f, g \in C(K),\ \ t \in K.$$

Alors, $C(K)$ est une algèbre commutative, unitaire (puisque $f_0(t) = 1$ est l'élément neutre).
En plus pour tout $f, g \in C(K)$,

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Alors, $C(K)$ est une algèbre de Banach commutative.
• *Un sous-espace vectoriel A de $C(K)$ est une* **sous-algèbre** *si A est stable par le produit (i.e $A \neq \emptyset$, $\forall f, g \in A$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ f + \lambda g \in A$ et $fg \in A$).*
Exemples : *(1) L'espace des polynômes est une sous-algèbre de $C(K)$.*
(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $C^{(k)}(K)$ est une sous-algèbre de $C(K)$.
• *On dira que A* **sépare les points** *de K si étant donné $x, y \in K$ et $x \neq y$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Théorème 2.2.1 *Soit K un espace métrique compact et A une sous-algèbre fermée de $C(K) = C(K, \mathbb{R})$. Supposons que A sépare les points de K. Alors*

$$A = C(K),$$

ou bien

$$\exists a \in K, \text{ tel que } A = \{f \in C(K);\ f(a) = 0\}.$$

Dans ce dernier cas, a est unique.

Pour la démonstration de ce Théorème on a besoin des Lemmes suivants :

Lemma 2.2.2 *(1) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit suivant :*

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

est une algèbre.

(2) Les seules sous-algèbres de $\mathbb{R}^2$ sont : $(0, 0)$; $\mathbb{R}^2$ ou les sous-espaces engendrés par $(1, 0)$ ou $(0, 1)$ ou $(1, 1)$.

Lemma 2.2.3 *Soit A une sous-algèbre fermée de $C(K)$, alors*

(a) $\forall f \in A, \quad |f| \in A$.

(b) $\forall f, g \in A, \quad \min(f, g) \in A$ et $\max(f, g) \in A$.

Lemma 2.2.4 *Soit A une sous-algèbre fermée de $C(K)$, stable par $\min(.,.)$ et $\max(.,.)$ et soit $f \in C(K)$.*
Si $\forall x, y \in K, \quad \exists g_{x,y} \in A$ tel que $g_{x,y}(x) = f(x)$ et $g_{x,y}(y) = f(y)$, alors $f \in A$.

Remarque 2.2.5 *Dans la plupart des exemples, les sous-algèbres B de $C(K)$ ne sont pas fermée, alors on applique le Théorème précédent à $A = \overline{B}$. D'où le Corollaire suivant*

Corollaire 2.2.6 *Soit K un espace métrique compact et B une sous-algèbre de $C(K) = C(K, \mathbb{R})$. Supposons que B sépare les points de K. Alors*

$$\overline{B} = C(K),$$

ou bien

$$\exists a \in K, \text{ tel que } \overline{B} = \{f \in C(K);\ f(a) = 0\}.$$

Dans ce dernier cas, a est unique.

Le Théorème de Stone-Weierstrass classique, se déduit directement du Corollaire précédent, et s'énnonce comme suit :

Théorème 2.2.7 **(Stone-Weierstrass, cas réel (1937))**
Soit K un espace métrique compact. Si une sous-algèbre A de $C(K,\mathbb{R})$,
(i) sépare les points de K ;
(ii) contient les fonctions constantes,
alors A est dense dans $C(K,\mathbb{R})$.

Théorème 2.2.8 **(Stone-Weierstrass, cas complexe)**
Soit K un espace métrique compact. Soit A une sous-algèbre de $C(K,\mathbb{C})$. Supposons que :
(i) sépare les points de K ;
(ii) A contient les fonctions constantes ;
(iii) $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$ (où $\overline{f}$ désigne le complexe conjugué de f).
Alors A est dense dans $C(K,\mathbb{C})$.

Exemple. *Soit $K = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. Soit*

$$A = \{f(z) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k z^k;\ \ \alpha_k \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{T}\},$$

l'algèbre des polynômes trigonométriques ou l'algèbre de Laurent. Alors, clairement
(i) A contient les fonctions constantes ;
(ii) sépare les points de $\mathbb{T}$.
Pour le point (iii) remarquons que pour $z \in \mathbb{T}$, $\overline{z} = z^{-1}$. Alors on a :

$$\overline{f(z)} = \sum_{k=-N}^{N} \overline{\alpha_{-k}} z^k, \quad \textit{donc} \quad \overline{f} \in A.$$

D'après le Théorème précédent, A est dense dans $C(\mathbb{T},\mathbb{C})$.
D'autre part, posons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $F(t) = f(\exp(it))$ pour $f \in C(\mathbb{T},\mathbb{C})$. Alors F est continue et 2π-périodique. La densité de A dans $C(\mathbb{T},\mathbb{C})$ veut dire que l'algèbre des polynômes trigonométriques est dense dans l'algèbre des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.2.9 *Dans le Théorème de Stone-Weierstrass, la condition "sépare les points de K" joue un rôle essentiel. L'exemple qui suit montre que sans cette condition on n'a pas la densité.*
Exemple *Soit $x, y \in K$, $x \neq y$, posons*

$$A = \{f \in C(K);\ f(x) = f(y)\}.$$

Alors A est une sous-algèbre fermée, contient les constantes, stable par la conjugaison (dans le cas complexe) et $A \neq C(K)$.

Remarque 2.2.10 *(1) Le Théorème de Stone-Weierstrass, n'est pas vrai sans l'hypothèse K compact.*
Exemple : *Soit $f : [0, +\infty[$ avec $f(x) = \exp(-x^2)$.*
Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\forall$ P polynôme non constant, $\lim_{x\to+\infty} |P(x)| = +\infty$. D'où, $|P(x) - f(x)| \geq |P(x)| - |f(x)|, \quad \forall x \in [0, +\infty[$ et donc $\lim_{x\to+\infty} |f(x) - P(x)| = +\infty$. Par conséquent il n'existe pas de suite de polynômes qui converge uniforment vers f.
(2) Dans le cas complexe, le Théorème de Stone-Weierstrass, n'est pas vrai sans l'hypothèse (iii). En effet, la fonction $h(z) = \overline{z}, \quad z \in \overline{B}(0, 1)$ ne peut pas être approximée par des polynômes en z sur $\overline{B}(0, 1)$, puisque

$$\int_0^{2\pi} h(\exp(it)) \exp(it)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

par contre pour tout polynôme P, on a

$$\int_0^{2\pi} P(\exp(it)) \exp(it)dt = 0.$$

Par conséquent il n'existe pas de suite de polynômes qui converge uniforment vers h.

Corollaire 2.2.11 **(Weierstrass (1885))**
Si K un espace métrique compact, alors l'ensemble des polynômes est dense dans $C(K)$.

Remarque 2.2.12 *Le Théorème de Weierstrass n'est pas vrai sans l'hypothèse K borné, comme le montre l'Exercice suivant*

Exercice 2.4 *Soit f une fonction continue sur un intervale I non borné de $\mathbb{R}$.*
Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes sur I si et seulement si f est un polynôme.

Un autre résultat d'approximation des fonctions continues par des polynômes.

Théorème 2.2.13 **(Théorème de Müntz (1914))**
Soit $(\alpha_n)_{n\geq1}$ une suite à termes strictement positifs et strictement croissante. Alors $\quad vect\{1, x^{\alpha_n};\ n \geq 1\}$ est dense dans $C([0, 1])$ si et seulement si

$$\sum_{n\geq1} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty.$$

Applications : *(1) Soit* $A = vect\{1, x^{2^n};\quad n \in \mathbb{N}\}$ *n'est pas dense dans* $C([0,1])$. *En effet, si on note* $\alpha_n = 2^n$ *alors*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty.$$

Par le Théorème de Müntz, A n'est pas dense $C([0,1])$.
Remarquons que dans cet exemple A n'est pas une sous-algèbre de $C([0,1])$. *Donc on ne peut pas appliquer le Théorème de Stone-Weiestrass.*

(2) Soit $A = vect\{1, x^{2n};\quad n \in \mathbb{N}^*\}$ *est dense dans* $C([0,1])$. *En effet, si on note* $\alpha_n = 2n$ *alors*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n} = +\infty.$$

Par le Théorème de Müntz, A est dense $C([0,1])$.
Remarquons que dans cet exemple A est une sous-algèbre de $C([0,1])$ *qui sépare les points de* $[0,1]$ *et contient les constantes. Donc on peut appliquer le Théorème de Stone-Weiestrass.*

Exercice 2.5 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue.*
(1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^n f(x)dx = 0 \Longrightarrow f = 0.$$

(2) Soit $I_n = \int_0^{+\infty} x^n \exp(-(1-i)x)dx,\ n \in \mathbb{N}$ *et* $i^2 = -1$.
(a) Montrer que $(n+1)I_n = (1-i)I_{n+1}$ *et en déduire la valeur de* I_n.
(b) Montrer que $\int_0^{+\infty} x^{4p+3} \sin(x) \exp(-x)dx = 0$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.
(On pourra remarque que $I_{4p+3} \in \mathbb{R}$*).*
(c) En déduire qu'il existe $f \in C([0,+\infty[,\mathbb{R})$ *non nulle, telle que* $\int_0^{+\infty} x^n f(x)dx = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.6 *(1) Soit* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue strictement monotone et* $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ *une application linéaire, continue vérifiant*

$$T(\varphi.f) = \varphi.T(f), \quad \textit{pour tout } f \in C([0,1]).$$

(a) Montrer qu'il existe $h \in C([0,1])$ *tel que*

$$T(P(\varphi)) = h.P(\varphi), \quad \textit{pour tout } P \textit{ polynôme.}$$

(b) En déduire qu'il existe $h \in C([0,1])$ *tel que*

$$T(f) = h.f, \quad \textit{pour tout } f \in C([0,1]).$$

Exercice 2.7 *Soit A l'espace vectoriel engendré par* $\{\sin^k(x),\ k \geq 0\}$.
Montrer que A est dense dans $C([0,1])$.