Université Lille I
M 104, $1^{\text{ère}}$ année

Année 2004-2005
DNS n° 1

Devoir n° 1

(à rendre la semaine du 07/03)

Exercice 1 Soit $E = \{(x, y, zt) \in \mathbb{R}^4 \,;\ x + y = 0 \ et\ z = 2t\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement sa reponse ou bien par un contre-exemple ou bien par une preuve.

1) Soient D_1, D_2 et D_3 des droites vectoriels de $\mathbb{R}^3$ non identiques deux à deux. Alors $\mathbb{R}^3$ est la somme de ces droites, i.e. $\mathbb{R}^3 = D_1 + D_2 + D_3$.
2) Soient F et G des hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathbb{R}^n \neq F \cup G$.
3) Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de $\mathbb{R}^4$ et soit $F = vect\{e_1, e_3\}$. Alors, tout sous-espace vectoriel supplémentaire de F contient e_2.

Exercice 3 Soit $\mathcal{P}_{2n}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus $2n$. On considère E_0 le sous-espace de $\mathcal{P}_{2n}$ des polynômes pairs et E_1 le sous-espace de $\mathcal{P}_{2n}$ des polynômes impairs.

1) Montrer que E_0 et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_{2n}$.
2) Déterminer la dimension de E_0 et celle de E_1.
3) A-t-on $\mathcal{P}_{2n} = E_0 \oplus E_1$? Justifier votre reponse.

M104 Corrigé du Devoir n° 1

Ex 1 : Considérons $v=(x,y,z,t)$, $w=(x',y',z',t')$ des vecteurs de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a = v+\lambda w = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z', t+\lambda t')$. Alors

$$(x+\lambda x')+(y+\lambda y') = (x+y)+\lambda(x'+y')=0 \quad \text{et}$$
$$z+\lambda z' = 2t+\lambda(2t') = 2(t+\lambda t') \quad \text{ce qui montre}$$

que $a \in E$. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Recherche d'une base : Si $v=(x,y,z,t)\in E$, alors $x=-y$ et $z=2t$.

D'où $v=(-y,y,2t,t) = (-y,y,0,0)+(0,0,2t,t) = y(-1,1,0,0)+t(0,0,2,1)$.

On a démontré que $\mathcal{B}=\{(-1,1,0,0);(0,0,2,1)\}$ est une partie génératrice de E. Clairement $\mathcal{B}$ est libre, c'est donc une base.

Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$: Évidemment plusieurs choix possible. Par exemple $\mathcal{B}'=\{(-1,1,0,0);(1,0,0,0);(0,0,2,1);(0,0,0,1)\}$ convient.

Ex 2 : 1) C'est faux. Prenons $D_1=\text{vect}\{(1,0,0)\}$, $D_2=\text{vect}\{(0,1,0)\}$ et $D_3=\text{vect}\{(1,1,0)\}$. Alors $D_1+D_2+D_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ z=0\}$.

2) Vrai. Rappelons d'abord qu'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ est un sous-EV de dimension $n-1$.

Supposons $\exists F, G$ des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ tq. $F\cup G=\mathbb{R}^n$. Or, de manière générale, l'union de deux espaces vectoriels F,G est un espace vectoriel si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

$\mathbb{R}^n$ étant un EV, $F\cup G=\mathbb{R}^n \Rightarrow F\subset G$ ou $G\subset F$.

Par conséquent $\dim(F\cup G)=n-1 \neq n = \dim \mathbb{R}^n$

3) Faux ! $G = \mathrm{vect}\{e_2+e_1, e_4\}$ est supplémentaire et $e_2 \notin G$.
Notons que $F = \mathrm{vect}\{e_1, e_3\}$ et G sont supplémentaires car $\{e_1, e_3, e_2+e_1, e_4\}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Ex 3 : 1) La somme de deux polynômes pairs est un polynôme pair. De même, lorsqu'on multiplie un polynôme pair par un scalaire on a toujours un polynôme pair. E_0 (et de même E_1) est alors un sous-EV de $\mathcal{P}_{2n}$.

2) La forme général d'un polynôme pair de degré au plus $2n$ est $p(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2n} x^{2n}$.

$\Rightarrow E_0 = \mathrm{vect}\{1, x^2, x^4, \dots, x^{2n}\}$ et ces vecteurs sont libres (ils sont extraits de la base canonique). Par conséquent $\dim(E_0) = n+1$ et $\dim(E_1) = n$.

3) Oui. On doit démontrer i) $E_0 \cap E_1 = \{0\}$ et ii) $E_0 + E_1 = \mathcal{P}_{2n}$.

i) Si $p \in E_0 \cap E_1$, alors $p(x) = p(-x) = -p(x) \Rightarrow 2p(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow p = 0 \in \mathcal{P}_{2n}$.

ii) Soit $p \in \mathcal{P}_{2n}$ un polynôme quelconque. Alors,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{2n} x^{2n} = \underbrace{\left(a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}\right)}_{\in E_0} + \underbrace{\left(a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2n-1} x^{2n-1}\right)}_{\in E_1}$$

$\Rightarrow p \in E_0 + E_1$.