Université Lille 1 **2012/2013**
L1 MASS

Analyse

–

FICHE 1 : NOMBRES RÉELS

Exercice 1 Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.
(Indication : on pourra supposer que $r=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est rationnel et chercher une contradiction en calculant $(r-\sqrt{a})^2$ de deux manières différentes).

Exercice 2

1. Soit $N_n = 0,2012\,2012\ldots 2012$ (n fois). Ecrire N_1 et N_2 sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que N_n est la somme des n permiers termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont on précisera le premier terme u_1 et la raison r.
3. En déduire pour $n\in\mathbb{N}^*$ quelconque l'écriture de N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*$.
4. Soit $M = 0,2011\,2011\,2011\ldots$. En utilisant les questions précédentes, écrire M sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*$.
5. Même question avec : $P = 0,11111\ldots + 0,22222\ldots + 0,33333\ldots + 0,44444\ldots + 0,55555\ldots + 0,66666\ldots + 0,77777\ldots + 0,88888\ldots + 0,99999\ldots$.

Exercice 3 Ecrire sous la forme $\frac{p}{q}$ les rationnels x dont les dévelopements décimaux périodiques sont donnés par :

$$3,14\overset{\frown}{14}\ \ldots\ ;\qquad 0,99\overset{\frown}{9}\ \ldots\ ;\qquad 3,149\overset{\frown}{9}\ \ldots$$

Exercice 4 Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ? des réels ?
$a=1/3,\quad b=1/15,\quad c=1/25,\quad d=1/125,\quad e,\quad f=0,333\cdots3\cdots,\quad g=\sqrt{2},$
$h=0{,}123456789\,123456789\,123\cdots,\quad j=\pi,\quad k=13/7,\quad l=27/17.$

Exercice 5 Simplifier les expressions suivantes :

1. $|-7|$, $|7+9|$, $|7-9|$, $|-7+9|$ et $|-7-9|$.
2. $|x-5|$, $|x+5|$ pour $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 6 résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $|x-3|=8$,
2. $|2x-5|=1$,
3. $|2x-5|=-1$,
4. $|x-3|\le 8$,
5. $|2x-5|\le 1$,
6. $|x+12|\le |x^2-8|$.

Exercice 7 Le maximum de deux nombres x,y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des deux nombres x,y.
Démontrer que :

$$\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}\quad\text{et}\quad \min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

(Indication : On distinguera les cas $x\ge y$ et $y\ge x$).

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Tracer les graphes des fonctions $f, |f|, f_+, f_-$ où : $f_+ = \max(f, 0), f_- = \min(f, 0)$.

Exercice 9 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}\ , \quad]0,1[\cap \mathbb{Q}\ , \quad \mathbb{N}.$$

Exercice 10 Soit

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tel que $-2 < x + \frac{1}{2x}$.
2. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{2x} \leq 2$.
3. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
4. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Exercice 11 Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément, dans $\mathbb{D}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$ (si la question se pose) ?

1. $[0,3[$,
2. $\{0\} \cup]1,2]$,
3. $\mathbb{D} \cap [0,1/3]$,
4. $\{x \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x = 1/n\}$,
5. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

Exercice 12

1. Donner deux parties A et B distinctes, bornées et non vides de $\mathbb{R}$.
2. Vérifier sur votre exemple que $A \cup B$ est bornée. Plus généralement, montrer que quelles que soient A et B, parties bornées et non vides de $\mathbb{R}$, $A \cup B$ est une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.
3. Vérifier sur votre exemple que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$. Plus généralement, montrer que quelles que soient A et B, parties bornées et non vides de $\mathbb{R}$, $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
4. Application : Quelles sont les bornes inférieure et supérieure de $\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 13 Soient A et B deux parties bornées non vide de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Montrer que $\inf B \leq \inf A$ et $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 14 On considère l'ensemble des nombres de la forme $1 + \frac{1}{n}$, où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses.

Exercice 15 Soit E l'ensemble des réels de la forme $\frac{n-1/n}{n+1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

Exercice 16 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait $x \leq y$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 17 Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.
2. Montrer que si $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$, alors $x = \sup A$.

Exercice 18 Soient A et B deux parties bornées et non vides de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 19 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tel que

$$0 < \alpha \leq a \leq \alpha' \quad \forall a \in A.$$

On note B la partie de $\mathbb{R}$ formée des inverses des éléments de A, c'est à dire $B = \{\frac{1}{a} \mid a \in A\}$.

1. Montrer que B est bornée.
2. Exprimer $\sup B$ et $\inf B$ en fonction de $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 20 Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que si $M = \sup X$ n'appartient pas à X, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $X \cap]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments.

Exercice 21 Pout tout $x \in \mathbb{R}$ on note $E(x)$ sa partie entière et $\mathrm{Fr}(x)$ sa partie fractionnaire.

1. Tracer les graphes des fonctions $x \mapsto E(x)$ et $x \mapsto \mathrm{Fr}(x)$.
2. Montrer les relations suivantes : $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$, $E(x + n) = E(x) + n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.