RÉSUMÉ DE COURS[1]

S. Kallel
Université de Lille
SADOK.KALLEL@AGAT.UNIV-LILLE1.FR

Dans ce cours plusieurs notions et constructions ont été introduites. Nous rappelons ici les plus importantes.

- Espaces topologiques et espaces quotients.
- Homeomorphismes et invariants topologiques.
- Action de groupe sur un espace et espaces quotients. Espaces projectifs.
- Les variétés réelles, lisses. Notion d'orientation. La bande de Mobius.
- Surface (variété réelle de dimension 2). Plan projectif $\mathbf{R}P^2$ et bouteille de Klein K. Classification des surfaces.
- Triangulation d'une variété. La caractéristique d'Euler $\chi(S)$ d'une surface S.
- Polyèdres réguliers et sous-groupes finis de $SO(3)$.
- Homotopie entre fonctions. Rétraction, déformation continue, et contractibilité.
- Chemins et lacets pointés. Groupe fondamental. Quelques calculs. Le groupe fondamental est un invariant homotopique.
- Théorème du point fixe de Brouwer.

Quelques objectifs visés: construction d'espaces nouveaux à partir d'anciens (par quotient, somme connexe, déformation); Utilisation de moyens algébriques pour distinguer entre deux espaces donnés (groupe fondamental ou caractéristique d'Euler); déformation d'applications continues entre espaces et déformation d'un espace dans un autre; introduction de notions locales (variété, lissité, vecteurs tangents) ou globales (orientabilité, champ de vecteurs non-nuls, genre pour les surfaces).

Notation: Une égalité d'espaces $X = Y$ voudra toujours dire que les deux espaces sont homéomorphes. Si les deux espaces sont *difféomorphes* (notion plus forte), on l'indiquera, et si les deux espaces sont *homotopes* (notion plus faible) on notera $X \simeq Y$. Une egalité entre groupes veut dire par contre que les groupes sont *isomorphes*.
Par I on entendra toujours l'interval $[0,1]$ et par paramètre un élément de I. On écrit $D^n \subset \mathbf{R}^n$ pour le disque *ouvert* de $\mathbf{R}^n$; $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \ \ |x| < 1\}$ (et pour simplifier on écrira tout simplement $D \in \mathbf{R}^n$). Bien entendu $\bar{D}$ sera le disque fermé (la cloture topologique de D dans $\mathbf{R}^n$).

[1]Bien que cette version contienne plus de détails (sur certains aspects) que le cours de Janvier, elle reste incomplète et préliminaire. Fautes de frappe et autres peuvent s'y être glissées. Une version plus complète sera distribuée ultérieurement.

La Sphère. On écrira S^n la sphère unité dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et donc on a la suite d'inclusions

$$S^n \subset \bar{D} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

On désignera par $N = (0, \ldots, 0, 1)$ et $S = (0, \ldots, 0, -1)$ les poles nord et sud de S^n. On peut aussi ecrire

$$S^n = H^+ \cup_{S^{n-1}} H^-$$

c'est à dire que S^n est union de la demie-sphère $H^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}, x_{n+1} \geq 0\}$ avec la demie-sphère negative "le long" de leur bord commun S^{n-1} (la sphère à l'equateur). Finalement il est souvent utile d'identifier la sphère S^n avec une *compactification* de $\mathbf{R}^n$;

$$S^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$$

Cette compactification[2] est obtenue à partir de $\mathbf{R}^n$ en ajoutant un point à l'infini, et la topologie est telle que plus on s'eloigne de l'origine dans $\mathbf{R}^n$, plus on se rapproche de ce point ∞. L'homéomorphisme $h : S^n \longrightarrow \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ est donné comme vous le devinez par la projection stéréographique [3] de centre N, avec $h(N) = \infty$.

Exemple. L'application $f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ s'étend à une application *continue* $\bar{f} : S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ on posant $\bar{f}(\infty) = 0$ et $\bar{f}(0) = \infty$.

Remarque: Il est très utile en topologie de "pointer" les espaces, c'est à dire de choisir dès le départ un "point base" (ou point préférentiel) dans l'espace. Comme vous le verrez ci-bas, ceci est utile dans la construction de "bouquets", de groupes fondamentaux, de lacets, etc.

Groupes. Un groupe finiment engendré est donné par un nombre fini de générateurs et de relations. On peut donner une *présentation* de ce groupe sous la forme

$$G =< g_1, \ldots, g_n \mid r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 1 >$$

Ceci veut dire que G est le quotient du groupe *libre* sur les générateurs $< g_1, \ldots, g_n >$ par le plus petit groupe normal contenant les mots $r_1, \ldots, r_k$.

Exemple. $< g >= \{\cdots g^{-1}, 1, g, g^2, \cdots\}$ et donc $< g >\cong \mathbf{Z}$. Pour insister sur le choix du générateur, on peut écrire $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\{g\}$. Les groupes cycliques sont de la forme $\mathbf{Z}_n\{g\} =< g \mid g^n = 1 >$ (isomorphes à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$). Vérifier que $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} =< a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 >$. On verra plus loin d'autres présentations utiles et importantes.

Espaces d'identification et espaces quotients. La plupart des espaces que nous manipulons sont des espaces métriques et donc admettent une topologie naturelle induite par la métrique. Un plongement $X \hookrightarrow \mathbf{R}^3$ est un homéomorphisme de X sur son image dans $\mathbf{R}^3$. Certains espaces peuvent être "représentés" dans $\mathbf{R}^3$, c'est à dire qu'ils admettent un plongement dans $\mathbf{R}^3$, et d'autres non (par exemple les surfaces non-orientables comme K ou $\mathbf{R}P^2$; voir plus loin).

Exercice. Montrer que le cylindre $S^1 \times I$ peut être plongé dans $\mathbf{R}^2$ (il est au fait homéomorphe à un anneau). De même, expliquer pourquoi (sans avoir à écrire des formules) que le cylindre avec un trou est homéomorphe à "la double fenêtre" (voir figure ci-dessous).

[2] Vous pouvez voir dans les livres de topologie générale la notion de "one point compactification".
[3] Voir exos en fin de cours.

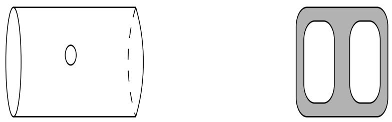

Figure 1: deux espaces homéomorphes

Critère + exercice. Notons que pour vérifier que $X = Y$, il suffit dans certains cas de construire une application continue et bijective $f : X \longrightarrow Y$ (la continuité de f^{-1} est automatique). *Ceci est vrai lorsque X est compact et Y est séparé par exemple* [4].

Remarque + Définition. Notons au passage qu'il est souvent plus facile de montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes (ou homotopes, etc), que de montrer qu'ils le sont. Cette observation est d'ailleurs la raison d'être des "invariants". *Un invariant topologique* est l'association à tout espace topologique une propriété ou une construction qui est preservée par les homéomorphismes entre espaces. Par exemple la compacité et la connexité sont des invariants topologiques (en particulier, ceci implique que D et $\bar{D}$ par exemple ne peuvent être homéomorphes).

Sur un espace topologique X on peut définir une relation d'equivalence $\sim$ et on denote par $X/\sim$ l'ensemble des classes d'equivalences. Cet ensemble devient un espace topologique comme suit. La projection $\pi : X \longrightarrow X/\sim$, $x \mapsto [x]$ induit une topologie sur $X/\sim$ en declarant U ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X. De plus cette topologie rend π automatiquement continue.

Exemple. La bande de Moebius est obtenue à partir du ruban $[-1,1]\times[-1,1]$ en identifiant $(-1,x)$ avec $(1,-x)$;

$$M = [-1,1] \times [-1,1]/(-1,x) \sim (1,-x)$$

Soit $A \subset X$ un sous-espace fermé, $x_0 \in A$ un point base. "Ecraser" A dans X veut dire identifier tous les points de A au point x_0 (sans toucher aux points dans le complément de A). L'espace obtenu

$$X/A = X/\sim \qquad x \sim y \ \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in A \\ x = y \text{ si } x \in X - A \end{cases}$$

est visiblement un espace quotient. Une propriété très utile est la suivante:

Si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et $f(A) = y_0 \in Y$, alors f se factorise

$$f : X \xrightarrow{\pi} X/A \xrightarrow{\bar{f}} Y$$

est $\bar{f}$ est continue (dans la topologie quotient).

Exemple. On vérifie que $\bar{D}/S^{n-1}$ est homéomorphe à la sphère S^n.

[4]En particulier toute application continue d'un compact dans un séparé est telle que $f(\text{fermé}) = \text{fermé}$.

EXEMPLE. Si X et Y sont deux espaces topologiques pointés ($x_0 \in X, y_0 \in Y$), alors on definit le bouquet

$$X \vee Y = X \times \{y_0\} \times \{x_0\} \times Y \subset X \times Y$$

Cet espace d'identifie à $X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$ (voir figure 2 pour $S^2 \vee S^1$).

EXERCICE. Si S^{n-1} désigne la sphère equateur de S^n, essayer de justifier le fait que $S^n/S^{n-1} = S^n \vee S^n$. On peut utiliser les exemples précédents. Si on écrit $S^n = H^+ \cup_{S^{n-1}} H^-$, alors nous avons les homéos suivants:
(1) $S^n/S^{n-1} = H^+/S^{n-1} \vee H^-/S^{n-1}$, et
(2) $H^+/S^{n-1} = \bar{D}^n/S^{n-1} = S^n$ (aussi egal à H^-/S^{n-1}).
Ici bien sur $\bar{D}^n$ est homéomorphe à H^+ par la projection $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$.

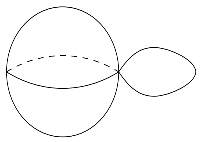

Figure 2: $S^2 \vee S^1$

EXEMPLE. On définit le cone sur X comme étant $cX := X \times I / X \times \{1\}$. On peut montrer que $cS^n = D^{n+1}$. Pour cela on considère l'application

$$S^n \times I \longrightarrow D^{n+1} \ , \quad (x, t) \mapsto (1-t)x$$

Cette application est constante sur $S^n \times \{1\}$ (qu'elle envoie à l'origine) et donc elle se factorise $cS^n \longrightarrow D^{n+1}$. Etant continue (voir ci-haut) et bijective (par construction), elle est donc un homéo (d'après critère plus haut).

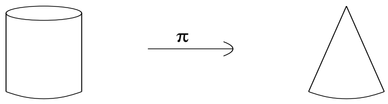

Figure 3: L'application quotient $\pi : X \longrightarrow cX$.

Notez l'existence d'une inclusion $X \hookrightarrow cX$, $x \mapsto (x, 0)$ (la base du cone). Voici (figure 4) d'autres identifications et espaces qu'on manipulera (plus tard) assez souvent (les flèches identiques signifient qu'on identifie les côtés point par point dans le sens de la flèche.)

$\boxed{\textbf{Action de groupe}}$. Un groupe topologique est un groupe tel que la multiplication du groupe et l'inverse $x \mapsto x^{-1}$ sont des applications continues. *Exemples*: S^1, $GL_n(\mathbf{R})$, $SO(n)$, S^3, etc. Un groupe discret (ou fini) est un groupe topologique (dans la topologie discrete pour laquelle les éléments du groupe sont aussi les ouverts).

Soit G un groupe topologique (fini, discret ou autre). On dit que G agit (à gauche) sur un espace topologique X s'il existe une application continue

$$G \times X \longrightarrow X \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

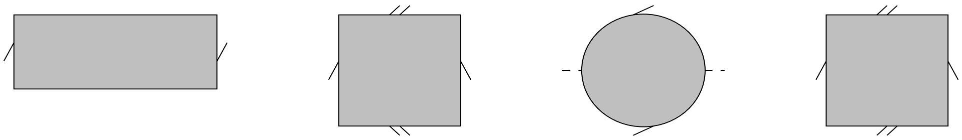

Figure 4: Quelques identifications: Mobius, Tore, Plan projectif, Klein

telle que: $1 \cdot x = x$ et $(g_1 \cdot (g_2 \cdot x)) = (g_1 g_2) \cdot x$ (1 etant l'elément neutre de G).
Montrer que forcément G agit par homéomorphismes; c'est à dire que pour tout g, multiplication par g: $X \xrightarrow{g\cdot} X$ est un homéomorphisme.

L'espace quotient X/G est (par définition[5]) l'espace des orbites de G dans X. Une orbite est de la forme $G_x = \{g \cdot x \ , \ x \in X\}$ et consiste en la donnée d'un point de X ainsi que de tous ses *translatés* $g \cdot x$, $g \in G$. On peut aussi penser à X/G de la facon suivante: introduisons la relation d'equivalence $\sim$ dans X en posant: $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = g \cdot x$. Alors une orbite est une classe d'equivalence de $\sim$, et la projection $X \longrightarrow X/G$ induit une topologie quotient sur X/G.

Remarque. Un groupe G peut agir de facons différentes sur un même espace X. En ecrivant X/G on doit toujours garder à l'esprit l'action sous-jacente. Par exemple $\mathbf{Z}_2$ agit sur S^1 en envoyant z sur $\bar{z}$ (le quotient par cette action est l'hemisphère nord), ou en envoyant z sur $-z$ (et le quotient est le cercle de nouveau).

Exemple. Cas evident: un groupe agit sur lui même de plusieurs facons: par translations (à gauche ou à droite): $G \times G \longrightarrow G$, $(g,h) \longrightarrow gh$, ou par conjugaison $(g,h) \longrightarrow ghg^{-1}$. Un sous-groupe $H \subset G$ agit de la même facon sur G. Les quotients G/H sont très interressants à l'etude, plus specialement du point de vue de la géométrie differentielle. Notons que si H agit sur G par translation et que H est *distingué*[6] dans G, alors G/H admet une structure de groupe pour laquelle l'application quotient $G \to G/H$ est un *homomorphisme*.

Exemple. A bien retenir l'action du groupe cyclique $\mathbf{Z}_n$ d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$ sur S^1 donnée par rotations. On choisit τ un generateur de $\mathbf{Z}_n$. On definit alors l'action par $\tau(z) = e^{2i\pi/n}z$. *Question*: Détérminer l'espace quotient $S^1/\mathbf{Z}_n$.

Exemple. Le groupe $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ agit par translations sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $(n,m) \times (x,y) \mapsto (x+n, y+m)$. Le quotient est par définition le tore $T = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Justifier le fait que $T = S^1 \times S^1$.

Exemple. L'action de Hopf. Le cercle $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ agit sur la sphere euclidienne $S^3 = \{(u,v) \in \mathbf{C}^2 \ , |u|^2 + |v|^2 = 1\}$ par l'action $z \cdot (u,v) = (zu, zv)$. Le quotient par cette action est la sphère S^2! L'application quotient $S^3 \longrightarrow S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ envoie $(u,v) \longrightarrow \frac{u}{v}$.

Exercice + Exemple. On montre que le quotient $SO(n+1)/SO(n)$ est homéomorphe à S^n. Voir les supplements (exo. 13) pour une preuve.

[5] A ne pas confondre avec la notation précédente X/A si $A \subset X$! Ecraser un espace et prendre un quotient par une action de groupe produisent des espaces différents.

[6] Un sous-groupe $H \subset G$ est distingué si pour tout $g \in G$, $h \in H$, $g^{-1}hg \in H$; c'est à dire $gH = Hg$.

Espaces projectifs réels. Si $x \in S^n$, dénotons par $-x$ son antipodale (i.e. le point diamétralement opposé). On peut alors considérer l'action de $\mathbf{Z}_2 =< \tau \mid \tau^2 = 1 >$ sur S^n donnée par $\tau(x) = -x$. Le quotient est noté $\mathbf{R}P^n = S^n/\mathbf{Z}_2$.

EXERCICE. Vérifier que $\mathbf{R}P^n$ est (à homéomorphisme près toujours) l'espace de toutes les droites vectorielles de $\mathbf{R}^{n+1}$ (c.a.d les droites qui passent par l'origine).

EXERCICE. Expliquer pourquoi $\mathbf{R}P^n$ est la même chose que le quotient du disque $\bar{D}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}), x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 \le 1\}$ (de bord S^{n-1}) par la relation $\mathbf{R}P^n \cong D^n/x \sim -x, \forall x \in S^{n-1}$.

EXEMPLE. $\mathbf{R}P^1 = S^1$ et $\mathbf{R}P^3 = SO(3)$. Pour se convaincre de cette dernière identification, on décrit tout élément de $SO(3)$ (qui est une rotation) comme un vecteur dans un disque $D^3_\pi \subset \mathbf{R}^3$ (de rayon π). Le vecteur donne l'axe de rotation et sa norme l'angle de rotation. Comme une rotation d'angle π correspond à la rotation d'angle $-\pi$ (de même axe), alors on peut conclure en utilisant l'exercice précédent.

EXEMPLE. $\mathbf{R}P^2$ est appellé le plan projectif. Malgré sa simplicité, cet espace se laisse mal appréhender puisqu'en effet il n'est pas possible de le plonger dans $\mathbf{R}^3$ (il est donc hors de notre champ de perception visuelle). Par contre on montre que si l'on enlève un petit disque de $\mathbf{R}P^2$ (formé des deux petites lunes grises sur la figure), alors on obtient le ruban de Moebius!

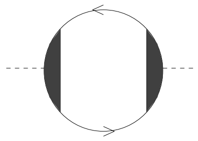

Figure 5: $\mathbf{R}P^2$ privé d'un petit disque ouvert est la bande de Moebius

Nous concluons par une très utile propriété de l'application quotient $X \longrightarrow X/G$.

Lemme: L'application $\pi : X \longrightarrow X/G$ est ouverte (c'est à dire l'image d'un ouvert par π est un ouvert.)

PREUVE: Soit U un ouvert de X. Pour tout $g \in G$, l'ensemble $gU = \{gx, x \in U\}$ est un ouvert puisque multiplication par g est un homéomorphisme. Hors

$$\pi^{-1}\pi(U) = \bigcup_{g \in G} gU$$

et comme l'union d'ouverts est toujours un ouvert, il s'ensuit que $\pi^{-1}\pi(U)$ et donc $\pi(U)$ sont ouverts.

Caractéristique d'Euler et Classification des surfaces. Une surface topologique est un espace topologique (séparé) S dont tout point admet un voisinage homéomorphe au disque ouvert $D^2 \subset \mathbf{R}^2$. On rappelle que $D^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Alternativement, une surface est une *variété réelle* de dimension 2.

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation d'une surface quelconque (plongée ou non dans $\mathbf{R}^3$). Une triangulation de S (surface compacte) est la donnée d'une famille (finie) de sous-espaces fermés $\{T_1, \dots, T_n\}$ qui recouvrent X et tels que chaque T_i est homéomorphe au triangle standard

Δ. Ce recouvrement est de sorte que T_i et T_j $(i \neq j)$ sont soit disjoints, soit ont un unique sommet en commun, soit une unique arête en commun

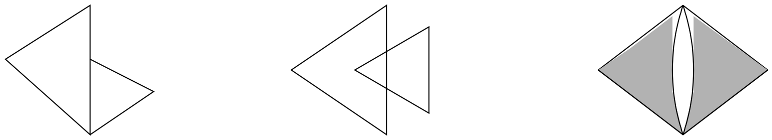

Figure 6: Cas exclus dans une triangulation

Soit A le nombre des arêtes de $\mathcal{T}$, S le nombre de sommets et F le nombre de faces. On pose

$$\chi(X) = S - A + F$$

Théorème. (Euler) *La caractéristique d'Euler ne dépend pas de la triangulation choisie. De plus c'est un invariant topologique (c'est à dire si $S = S'$, alors $\chi(S) = \chi(S')$.*

Figure 7: Triangulation du tore (gauche) et de $\mathbf{R}P^2$ (droite).

Ce résultat est très joli et l'on donnera une démonstration (due à Cauchy dans le cas de la sphère) un peu plus bas. Il est important de remarquer que la réciproque au théorème d'Euler ($S = S' \Longrightarrow \chi(S) = \chi(S')$) est vraie si on tient compte de l'orientation! Une surface est NON orientable si elle contient une bande de Moebius (ou de facon equivalente si elle contient un chemin qui inverse l'orientation). Nous définirons l'orientation (en toute dimension) plus precisemment plus tard.

Exercice. Expliquez pourquoi il n'est pas possible de trouver une triangulation du tore (figure 7) contenant moins de triangles.

Appelons sphère, tore et plan projectif tout espace homémorphe (respectivement) à $S^2, T = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et $\mathbf{R}P^2 = S^2/\mathbf{Z}_2$. On définit la somme connexe de deux surfaces $S_1 \# S_2$ de la facon suivante: on enlève à chacune des deux surfaces l'intérieur d'un petit disque ouvert, on obtient alors deux surfaces S_1' et S_2', ayant chacun un bord homéomorphe au cercle. Soit $h : \partial S_1' \longrightarrow S_2'$ un homéomorphisme. Alors $S_1 \# S_2$ est la surface qu'on obtient en identifiant $x \in \partial S_1' \subset S_1'$ avec $h(x) \in \partial S_2' \subset S_2'$. Cette construction[7] ne depend pas de l'homéomorphisme choisi (c'est a dire deux homéos produisent deux surfaces homéomorphes).

[7] On s'imagine qu'il faut être un peu plus précis et montrer que l'espace quotient ainsi obtenu est bien une surface. Ceci revient à voir que chaque point dans l'image du bord admet un voisinage homéomorphe au disque D^2. Ceci se fait sans trop de surprises.

On peut énoncer le théorème suivant de classification des surfaces.

Théorème. *Toute surface topologique compacte connexe est homéomorphe à l'une des surfaces suivantes*
(i) La sphère
(ii) une somme connexe de tores (en nombre fini g dit le "genre" de la surface)
(iii) une somme connexe de plans projectifs (en nombre fini egalement).

Les catégories $(i), (ii)$ décrivent les surfaces orientables, par contre (iii) décrit celles qui ne le sont pas. Ce théorème implique en particulier *que deux surfaces sont homéomorphes si et seulement si elles ont même caractéristique d'Euler et même orientation*.

On peut bien sur calculer χ pour chaque surface:

$$\begin{aligned}\chi(S) &= 2-2g \ , \ \text{si } S = \#^g T \quad \text{orientable de genre } g\\ \chi(S) &= 2-g \ \ , \ \text{si } S = \#^g \mathbf{R}P^2 \quad \text{non orientable de genre } g\end{aligned}$$

Observons que la bouteille de Klein K ne figure pas sur la liste telle que présentée. Mais ceci n'est pas grave puisqu'on peut verifier que

$$K = \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2$$

Ceci se déduit de la suite des 3 transformations suivantes (la figure à l'extrême gauche est de nouveau une copie de $\mathbf{R}P^2$ privé d'un disque).

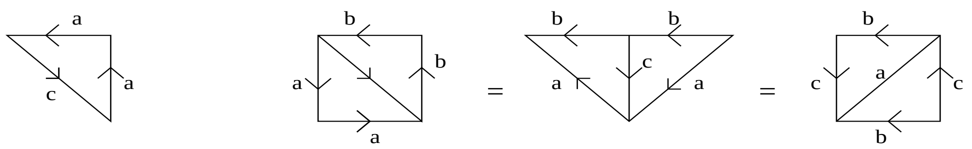

Figure 8: Justification graphique de l'homéo entre $\mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2$ (2ieme figure à gauche) et K (dernière à droite).

Remarque. L'orientation est importante puisque $\chi(K) = \chi(T) = 0$ mais les deux surfaces ne sont pas homéomorphes.

Polyèdres et Polyèdres Réguliers. Un polygone est la donnée d'une collection de points $A_1, \ldots, A_n$ et de segments entre eux $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, tel que ces segments ne s'entrecoupent pas. Un polyèdre est un sous-espace de $\mathbf{R}^3$ donné par la réunion de régions polygonales (les faces) sujettes aux conditions suivantes:
(i) Toute arête d'un polygone appartient à un seul autre polygone.
(ii) Les faces qui ont un sommet en commun doivent pouvoir constituer une suite dans laquelle deux faces consécutives ont une arête en commun. (Cette condition est pour eviter la configuration de deux polyèdres qui se touchent en un sommet).
En particulier et à chaque sommet, il y'a au moins 3 faces qui se rejoignent.

Le lemme suivant est un corollaire immédiat du théorème d'Euler mais on en donne ici une preuve très courte attribuée à Cauchy.

Lemme. *Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre homéomorphe à S^2, alors $\chi(\mathcal{P}) = 2$.*

Preuve: Soit $\mathcal{P}$ un tel polyèdre. On se ramène à un nouveau polyèdre $\mathcal{P}'$ planaire de la facon suivante: on enlève une face de $\mathcal{P}$ et on projète (stéréographiquement) le reste (par rapport au centre du triangle) sur un plan (ou si on veut, on etire le bord et on fait étaler le polyèdre sur un plan). Si on compte la région externe comme une face de $\mathcal{P}'$, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont même χ.

Si une face n'est pas triangulaire, on trace une diagonale entre 2 sommets. Ceci ajoute une face et une arête et donc ne change pas χ. En itérant ce procédé, on obtient une triangulation avec le même χ. On peut donc supposer dès le départ que $\mathcal{P}$ (et $\mathcal{P}'$ sont des triangulations).

En seconde etape on élimine tous les triangles qui partagent deux cotes (ou aretes) avec la région exterieure. Ceci enleve un sommet, 2 aretes et une face (donc ne change pas χ).

Ensuite on supprime les triangles avec seulement une arete en commun avec la région exterieure. Ceci reduit les arêtes et les faces de une chacune. En itèrant ce procédé on aboutit à un seul triangle Δ (sans avoir changé la caractéristique!). Mais $\chi(\Delta) = 2$.

Un polyèdre est dit régulier (ou encore "solide platonique") si toutes les faces sont delimitées par des polygones equilatéraux et equianguleux, et que chaque sommet est incident au même nombre de faces.

Si chaque face (polygonale) est delimitée par p arêtes, et si q arêtes se rejoignent à un sommet, alors la paire (p, q) determine uniquement le polyèdre! On denote par $\{p, q\}$ un tel polyèdre. Par exemple le carré est donné par $\{4, 3\}$ (ou aussi C_6 pour 6 faces carrées), le tetraèdre par $\{3, 3\}$ (ou encore Δ_4 pour 4 faces triangulaires), l'octaèdre par $\{3, 4\}$ (ou Δ_8 pour 8 faces triangulaires), le dodécaèdre par $\{3, 5\}$ (ou P_{12} pour 12 faces pentagonales). On vous laisse deviner le symbole de l'icosaèdre Δ_{20} (voir la notion de dualité plus bas). Au fait les polyèdres qu'on vient de citer constituent la totalité des polyèdres convexes.

Théorème. (Grecs) *Il existe exactement 5 polyèdres réguliers convexes: le tetraèdre Δ_4, le cube C_6, l'octaèdre Δ_8, l'icosaèdre Δ_{20} et le dodecaèdre P_{12}.*

Preuve: Considérons un polyèdre régulier $\{p, q\}$. Comme ce polyèdre est homéomorphe à S^2, on a que $\chi(\{p, q\}) = 2$. D'autre part, chaque face est incidente à p arêtes, et chaque arête est partagée entre deux faces. Ceci donne que $pF = 2A$. D'autre part et comme q arêtes se rejoignent en un sommet, et que chaque arête fait le lien entre deux sommets, on voit que $qS = 2A$. Par suite

$$\chi(\{p, q\}) = \frac{2A}{p} + \frac{2A}{q} - A = 2$$

Ce qui entraine que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$, avec nécéssairement $p \geq 3$, $q \geq 3$. Le cas $p > 3$ et $q > 3$ etant impossible, il s'ensuit que soit $p = 3$ soit $q = 3$. Si $p = 3$, alors $\frac{1}{q} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow (q, A) = (3, 6), (4, 12), (5, 30)$. De même pour $q = 3$, ce qui donne au total les cinq cas distincts possibles décrits plus haut.

Vous trouverez une belle illustration des ces polyèdres réguliers dans
http://mathforum.org/sum95/math_and/poly/reg_polyhedra.html

Problème. Sur la sphère unité S^2, quel est le nombre maximal de points qu'on peut mettre qui soient deux à deux equidistants? *Reponse: 4.*

Groupes des solides platoniques. Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ une partie non-vide de $\mathbf{R}^n$. On peut alors définir

$$Isom(X) = \{g \in O(n) \mid g(X) = X\}$$

On vérifie (facilement) que $Isom(X)$ est un groupe. C'est le groupe des isométries (linéaires) de $\mathbf{R}^n$ qui garde X invariant.

Exercice. Soit $X = [-1, 1] \subset \mathbf{R}^2$. Déterminer $Isom(X)$ (*Réponse*: $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$). C'est d'ailleurs le seul groupe "diédral" abélien (voir ci-dessous).

Plus généralement, on dénote par P_n le polygone régulier de centre l'origine $O \in \mathbf{R}^2$ et de sommets $e^{2\pi ik/n}, 1 \leq k \leq n-1$. On se propose de déterminer le groupe

$$D_n := Isom(P_n)$$

(qu'on appelera groupe *diédral*). Par exemple, D_4 est le groupe des isométries de $\mathbf{R}^2$ qui laissent invariant un carré centré en O. On vérifie que:
• D_n est un groupe fini. Au fait toute transformation de P_n permute les n-sommets et d'ailleurs on a un homomorphisme de groupe $D_n \longrightarrow S_n$ (le groupe symétrique sur n-lettres). Cette application est injective dès que $n > 2$ (elle ne l'est pas pour le cas $n = 2$ comme vous avez pu le vérifier dans l'exercice précédent).
• Dans D_n on trouve déjà le sous-groupe $\mathbf{Z}_n\{r\}$ engendré par la rotation d'ordre n; $r : z \mapsto e^{2\pi i/n}z$.
• D_n contient aussi le sous-groupe d'ordre 2 engendré par la reflexion $s : z \mapsto \bar{z}$. On montre que s et r sont les seuls générateurs de D_n et que de plus ils satisfont à la relation $srs = r^{-1}$.

Proposition: *Le groupe diédral D_n admet la présentation*

$$D_n = < r, s \mid r^n = s^2 = srsr = 1 >$$

C'est un groupe d'ordre $2n$, non-abelien[8] *pour $n > 2$.*

Notez que $\mathbf{Z}_n\{r\} \subset D_n$ est un sous-groupe distingué de D_n (car d'indice 2) et que donc nous avons une extension de groupes $\mathbf{Z}_n \hookrightarrow D_n \to \mathbf{Z}_2$ (qui est souvent notée comme produit semi-direct $D_n = \mathbf{Z}_n \rtimes \mathbf{Z}_2$).

De la même manière on souhaiterait etudier les groupes de symétries des polyèdres reguliers. Deux solides platoniques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dits duaux si lorsque $\mathcal{P}$ est inscrit dans la sphère S^2, alors $\mathcal{P}'$ est tracé par les tangentes à la sphère aux sommets de $\mathcal{P}$ (voir figure). On voit facilement que $\{p, q\}$ est dual à $\{q, p\}$; et que le tetraèdre $\{3, 3\}$ est self-dual. L'avantage de cette observation est le fait que toute isométrie (dans $O(3)$) qui préserve $\mathcal{P}$ préserve aussi $\mathcal{P}'$. Deux solides duaux ont même groupe d'isométrie.

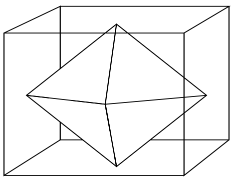

Figure 9: La dualité entre le carré et l'octaèdre.

On remarque que des 5 polyèdres, sauf Δ_4 n'admet pas de centre de symétrie. Toutefois Δ_4 admet des plans de symétrie: chacun d'eux est determiné par la donnée d'une arête et du milieu de l'arête opposée. Si on dénote par $Isom^+(\mathcal{P}) = \{g \in SO(3) \mid g(\mathcal{P} = \mathcal{P}\}$; le groupe

[8] Vérifier le.

de symétrie (à determinant positif) de $\mathcal{P}$, alors on a une extension[9]

$$Isom(\mathcal{P}) = Isom^+(\mathcal{P}) \rtimes \mathbf{Z}_2$$

et on écrit $\mathbf{T} = Isom^+(\Delta_4)$ (le groupe de rotations du tetraèdre), $\mathbf{O} = Isom^+(\Delta_8) = Isom^+(C_6)$ le groupe de rotations de l'octaèdre, et finalement par $\mathbf{I}$ le groupe de l'icosaèdre. Alors

Théorème. *Les seuls groupes finis de $SO(3)$ sont les groupes cycliques $\mathbf{Z}_m$, diédraux D_m, $\mathbf{T}, \mathbf{O}$ et $\mathbf{I}$.*

Je vous laisse le soin (quand vous en avez l'occasion) de trouver des générateurs et relations pour chacun. On peut verifier que $\mathbf{T}$ est isomorphe au sous-groupe alterné A_4 (d'indice 2 dans S_4; voir exo. 12 en fin de cours), que $\mathbf{O} = S_4$ et que $\mathbf{I} = A_5$ (voir Wolf).

EXERCICE. Le groupe D_m admet pour générateur une réflection s (voir plus-haut). Comment se peut-il que D_m soit sous-groupe du groupe de rotations $SO(3)$?
(*Réponse. Le générateur s est une réflection dans $\mathbf{R}^2$ et non dans $\mathbf{R}^3$! Au fait on a une inclusion $O(n) \longrightarrow SO(n+1)$, $A \mapsto \begin{pmatrix} \det A & \\ & A \end{pmatrix}$. Via cette inclusion, l'elément s correspond à une rotation dans $\mathbf{R}^3$ d'axe un axe de symétrie du polygone.*

$\boxed{\textbf{Homotopie}}$. Ce concept est à la fois simple, naturel et surtout très utile. Comme vous le verrez il est omniprésent en mathématiques. Soit $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$. On dit que $F : I \times X \longrightarrow Y$ est une homotopie entre f_0 et f_1, et on note $F : f_0 \simeq f_1$ si pour tout $x \in X$, F satisfait aux conditions:
- $F(x, 0) = f_0(x)$
- $F(x, 1) = f_1(x)$

Graphiquement f_0 est homotope à f_1 (par une homotopie F) si on arrive à "remplir" le carré avec une fonction continue F tel que $F_{|\{0\}\times X} = f_0$, $F_{|\{1\}\times X} = f_1$ (voir figure 11).

Etant donné $A \subset X$ un sous-espace fermé, on écrira $F : f \simeq g$ rel(A) si l'homotopie est stationnaire sur A, c'est à dire pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $a \in A$, $F_t(a) = a$ (figure 11 pour $A = \{0, 1\} \subset I = X$). On écrit F_t pour la fonction F restreinte à $\{t\} \times X$.

EXEMPLE. Soit $f, g : S^1 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ les applications

$$f(e^{ix}) = (\cos x, \sin x) \quad \text{et} \quad g(e^{ix}) = (2\cos x, 2\sin x)$$

Alors $f \simeq g$ par l'homotopie $F(t, e^{ix}) = ((1+t)\cos x, (1+t)\sin x)$. Visualisons cette homotopie graphiquement: pour $t \in [0, 1]$, $F_t(S^1)$ est un cercle de rayon $(1+t)$ dans $\mathbf{R}^2$. Nous voyons donc que (en général)

Une homotopie $F : f \simeq g : X \longrightarrow Y$ est une déformation continue à un paramètre de l'image de f dans l'image de g dans X.

EXEMPLE. Soit $\bar{D}^*$ le disque unité fermé et pointé de $\mathbf{C}$, et soit $f : S^1 \longrightarrow \bar{D}^*$ l'inclusion du bord ($S^1 = \partial \bar{D}^*$). Soit c_1 l'application constante au point $1 \in \mathbf{C}$. Alors $f \not\simeq c_1$. L'idée bien

[9] Cette description algébrique est optionelle. Simplement gardez à l'esprit que le groupe de symétrie d'un polygone regulier est engendré par une symétrie et des rotations.

sur etant qu'une telle homotopie est une deformation de $f(S^1) = S^1 \subset \bar{D}^* \subset \mathbf{C}$ au point 1 et que donc necessairement (par continuité) $F_t(x) = 0$ pour un certain t et un certain $x \in S^1$ (ce qui n'est pas permis puisque $0 \notin \bar{D}^*$)[10].

Exemple. Pour $x \in X$ on dénote par $c_x : I \longrightarrow X$ le chemin constant en x. Expliquer pourquoi une homotopie entre c_x et c_y est la donnée d'un chemin de x vers y. Si x et y sont dans des composantes connexes différentes alors $c_x \not\simeq c_y$.

Exemple. N'importe quelles deux applications dans $\mathbf{R}^n$ sont homotopes. Ceci est du au fait que $\mathbf{R}^n$ est convexe (l'homotopie est donnée par $F(t,x) = tf(x) + (1-t)g(x)$).

Propriétés:
- La relation $\simeq$ définie sur les espaces de fonctions continues $\mathrm{Map}(X,Y)$ est une relation d'equivalence. On notera par $[f]$ la classe d'equivalence de $f : X \longrightarrow Y$; c'est à dire $[f] = \{g : X \longrightarrow Y \mid g \simeq f\}$.
- Si $f \simeq f' : X \longrightarrow Y$ et $g \simeq g' : Y \longrightarrow X$, alors $g \circ f \simeq g' \circ f' : X \longrightarrow Z$ (*Démontrer le*).

Rétraction et déformation. Soit $A \subset X$, $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion. A est dit "retract" de X s'il existe une application continue $r : X \longrightarrow A$ telle que la composée $r \circ i$ coincide avec l'identité de A; id_A

$$id_A : A \hookrightarrow X \xrightarrow{r} A$$

Exemple. Tout point $x \in X$ est un retract de X (evident). Le bord $S^1 \subset \bar{D}^*$ est un retract puisqu'on peut définir $r : \bar{D}^* \longrightarrow S^1$ par $r(x) = \frac{x}{|x|}$. On verra plus tard (Brouwer) que $S^1 = \partial\bar{D}$ n'est pas retract de $\bar{D}$.

On dit que A est "deformation retract" de X s'il existe une deformation à un paramètre qui deforme X dans A tout en gardant A fixe! Ceci se traduit par l'existence de $F : I \times X \longrightarrow X$ tel que

$$F_0(x) = x \ , \ F_1(x) \in A \ \text{ et } \ F_t(a) = a \ \forall a \in A, \forall t \in I$$

Dans ce cas on voit bien que $F_1 : X \longrightarrow A$ est un retract (et donc la notion de DR est plus forte que la notion de retract).

Exemple. $S^{n-1} \subset \bar{D}^*$ est un deformation retract et la déformation est donnée par $F(t,x) = (1-t)x + t\frac{x}{|x|}$.

Exercice. Montrer que S^{n-1} est deformation retract de $S^n - \{N, S\}$ (N et S sont les poles de S^n).

Exemple. Il est facile de voir que $S^1 \times \{1\}$ est un retract de $S^1 \times S^1$ mais n'est pas deformation retract. Voici un exemple plus géométrique (qui fait implicitement référence au groupe fondamental).

Definition: X est contractible s'il existe $x_0 \in X$ tel que $\{x_0\}$ est deformation retract de X. A homotopie près un espace contractible ressemble à un point, donc est peu interressant. Par exemple D^n se contracte à l'origine via la *contraction* $F(t,x) = tx$.

[10] On donnera un argument plus complet une fois que le groupe fondamental est introduit.

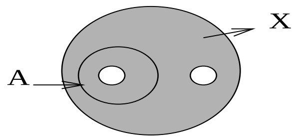

Figure 10: Le cercle A est un retract de X, mais n'est pas deformation retract.

Exercice. Montrer que tout espace contractible est nécéssairement connexe par arcs.

Groupe Fondamental. A tout espace topologique X pointé (de point base $x_0 \in X$) on peut associer un groupe (pas toujours abelien!) qu'on note $\pi_1(X, x_0)$. La notion d'associer à un espace un groupe (ou autre construction algébrique) est fondamental dans les mathematiques modernes.

Un lacet dans X est une application continue de S^1 dans X. Choisissons $1 \in S^1 \subset \mathbf{C}$ comme etant l'origine du cercle. Un lacet est basé en x_0 s'il est donné par $f : S^1 \longrightarrow X$ avec $f(1) = x_0$. Alternativement[11], un tel lacet est donné par un chemin $f : [0,1] \longrightarrow X$ tel que $f(0) = f(1) = x_0$. On note par $[f]$ la classe d'homotopie de f relativement aux extrémités $\{0, 1\}$; c'est à dire

$$g \in [f] \Leftrightarrow f \simeq g \ \ rel\{0,1\}$$

Notez bien qu'une homotopie $F : f \simeq g$ entre deux lacets pointés est une application du carre $I \times I$ dans X qui envoie $I \times \{0\}$ et $I \times \{1\}$ au point x_0, et qui restreinte à $\{0\} \times I$ est f, tandis que sa restriction sur $\{1\} \times I$ est g. Il devient alors très simple de représenter cette homotopie par le graphique (figure)

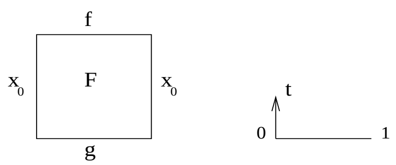

Figure 11: Une homotopie $F : f \simeq g$ rel. $\{0, 1\}$ (qui remplit le carré).

On est tout à fait prêt à définir le "'groupe fondamental" de X basé en x_0:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &:= \{[f],\ f : S^1 \longrightarrow X, f(1) = x_0\} \\ &= \{[f],\ f : [0,1] \longrightarrow X, f(1) = f(0) = x_0\} \end{aligned}$$

Reste à définir l'opération de groupe! La construction est bien jolie. Soit $f, g : [0,1] \longrightarrow X$ deux lacets pointés en x_0 (c'est à dire de nouveau $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = x_0$). On definit

$$f * g : [0,1] \longrightarrow X \ , \quad f * g(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

[11]En utilisant le fait que $[0,1]/\{0,1\} = S^1$.

Géométriquement ceci revient à recoller les deux lacets l'un après l'autre (et de les traverser deux fois plus vite pour garder le paramétrage dans $[0,1]$). On peut vérifier que:

• Si $f \simeq f'$ et $g \simeq g'$, alors $f * g \simeq f' * g'$ et donc $*$ est une opération qu'on peut definir sur les classes d'homotopies de la facon suivante: $[f] \cdot [g] := [f * g]$.

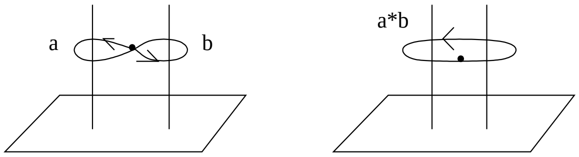

Figure 12: Multiplication de deux lacets a et b basés au point marqué en gras. Le lacet a fait le tour de la première droite L_1 et b le tour de L_2 (dans le sens de paramétrage indiqué)

• L'opération $\cdot$ dans π_1 est associative. Pour cela il faut vérifier que pour des lacets pointés α, β et γ, $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$ (voir figure 13).

• La composition dans π_1 admet un élément neutre $1 := c_{x_0}$ (le lacet constant au point base). L'homotopie explicite $F : \alpha \simeq 1 \cdot \alpha$ est donnée par

$$F(t,s) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha\left(1 - \frac{2(1-t)}{1+s}\right) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

• Tout $[f] \in \pi_1$ admet un inverse définit par $f^{-1}(t) = f(1-t)$ (géométriquement, f^{-1} est le lacet parcouru dans le sens inverse).

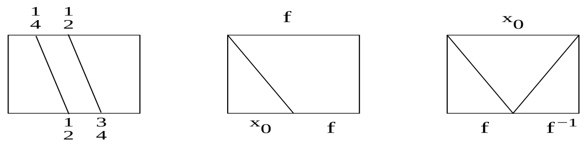

Figure 13: Les homotopies qui donnent l'associativité, l'élément neutre et l'inverse.

Ce qui nous interresse le plus (dans le cadre de ce module) sont les applications de ces idées, ainsi que quelques calculs de groupes fondamentaux. Tout d'abord une remarque et une propriété fondamentale.

Remarque: Le choix du point base n'est pas important si X est connexe par arc. En effet soit x_0 et x_1 deux points de X, et soit $\gamma : I \longrightarrow X$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ un chemin entre ces deux points. Si $f : S^1 \longrightarrow X$ est basée en x_1, alors

$$\gamma^{-1} * f * \gamma = \begin{cases} \gamma(3t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ f(3t-1) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \gamma(3-3t) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est un lacet basé en x_0. L'application $[f] \mapsto [\gamma^{-1} * f * \gamma]$ est au fait un *isomorphisme de groupe* $\pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$.

PROPRIÉTÉ: Si $f : X \longrightarrow Y$ est telle que $f(x_0) = y_0$, alors on a une flèche induite $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ définie par $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$ ou $\alpha : S^1 \to X$ est un lacet basé en x_0 (i.e. *l'image par une application continue d'un lacet en* x_0 *est un lacet en* $f(x_0)$.

EXERCICE. Si X est contractible, alors $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ (le groupe trivial).

EXERCICE. Si A est deformation retract de X, $a \in A \subset X$, alors $\pi_1(A, a) \cong \pi_1(X, a)$. Nous vous encourageons vivement à réfléchir sur cet exercice (une demonstration est donnée dans les corollaires ci-bas et dans la preuve du théorème de Brouwer).

Nous allons expliciter le groupe fondamental du cercle. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ considérons l'application

$$f_n : S^1 \longrightarrow S^1 \quad , \quad z \mapsto z^n$$

L'image réciproque de $x \in S^1$ consiste en n-points distincts (les solutions de $z^n = x$). Ceci signifie géométriquement que $f_n(S^1)$ *fait le tour* du cercle n-fois. On peut représenter "schématiquement" cette application pour $n = 2$

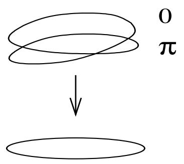

Figure 14: L'application $z \mapsto z^2$ (le cercle d'en haut est paramétré "doublement plus vite" que celui d'en bas)

Ci-suit on énonce quelques résultats très intuitifs mais malgré cela assez long à vérifier (vous pouvez consulter le livre de William Massey ou autre pour les détails). Tout d'abord, l'application f_n ne peut être homotope à f_m pour $n \neq m$. Ceci montre que l'application

$$\phi : \mathbf{Z} \longrightarrow \pi_1(S^1, 1) \quad , \quad n \mapsto [f_n]$$

est une application injective. On montre de plus que ϕ est surjective, c'est à dire que tout $f : S^1 \longrightarrow S^1$, $f(1) = 1$, est homotope à f_n pour un certain n. On appelle n le *degré* de f.

Théorème. *L'application* $\pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbf{Z}$, $[f] \mapsto \deg(f)$ *est un isomorphisme.*

Ce théorème est parmi les plus importants de ce cours, et ses applications sont variées. Des corollaires "immédiats" sont les suivants:

COROLLAIRES (utiles à connaitre)
(a) Soit L une droite dans $\mathbf{R}^3$, x_0 un point en dehors de L, alors $\pi_1(\mathbf{R}^3 - L; x_0) = \mathbf{Z}$.
(b) Soit $\bar{D}^*$ le disque unité dans $\mathbf{R}^2$ privé de l'origine. Alors $\pi_1(\bar{D}^*, 1) = \mathbf{Z}$.
(c) Soit C un cercle dans S^3 et $x_0 \in S^3 - C$, alors $\pi_1(S^3 - C; x_0) = \mathbf{Z}$.

Preuve: On démontrera le (b) et il est impératif que vous compreniez cet argument.
Tout d'abord, le bord de $\bar{D}^*$ qui est $S^1 = \partial\bar{D}^*$ est un deformation retract via la déformation $F_t : x \mapsto (1-t)x + t\frac{x}{|x|}$. Ceci bien sur revient à dire:
(1) D'une part F_1 est homotope à l'identité de $\bar{D}^*$,
(2) et que de plus F_1 est une rétraction de $\bar{D}^*$ dans S^1 (puisque $\forall t,\ F_t(x) = x$ si $x \in S^1$).
On peut donc écrire la suite d'applications

$$\bar{D}^* \xrightarrow{F_1} S^1 \xrightarrow{i} \bar{D}^* \xrightarrow{F_1} S^1$$

ou i est l'inclusion. Ceci induit des flèches au niveau du π_1:

$$\pi_1(\bar{D}^*, 1) \xrightarrow{F_{1,*}} \pi_1(S^1; 1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\bar{D}^*; 1) \xrightarrow{F_{1,*}} \pi_1(S^1, 1)$$

La composée $F_{1,*} \circ i_* = id_{\pi_1(S^1)}$ (puisque $F_1 \circ i = id_{S^1}$). Ceci implique i_* est *injective*!. D'autre part, $i_* \circ F_{1,*} = id_{\pi_1(\bar{D}^*)}$ puisque $i \circ F_1 \simeq id_{\bar{D}^*}$. Ceci implique que $F_{1,*}$ est injective aussi. Ceci donc implique (clairement) que $\pi_1(\bar{D}^*, 1) \cong \pi_1(S^1; 1)$.

Théorème. (Brouwer) *Les affirmations suivantes sont equivalentes:*
(a) Le disque unité $\bar{D} \subset \mathbf{R}^2$ ne peut pas se retracter sur son bord.
(b) Toute application continue de $\bar{D} \longrightarrow \bar{D}$ admet un point fixe.

Preuve: Absurde. Supposons que $f : \bar{D} \longrightarrow \bar{D}$ est continue et sans points fixes. On a donc que $f(x) \neq x$ pour tout x. Considérons alors l'application $r(x)$ qui à x associe le point d'intersection de la demie droite emanant de $f(x)$ (ouverte en $f(x)$) et passant par x, avec le cercle S^1 du bord. Pour $x \in \bar{D}$, $r(x)$ est bien défini (unique). Cette application est continue et de plus si $x \in S^1$, alors $r(x) = x$! Ceci montre que r est un retract de $\bar{D}$ dans S^1

$$S^1 \xrightarrow{i} \bar{D} \xrightarrow{r} S^1$$

En passant au π_1 (comme précédemment), on voit que $\pi_1(S^1, 1)$ s'injecte dans $\pi_1(\bar{D}, 1)$. Mais $\pi_1(\bar{D}, 1) = 0$ (car $\bar{D}$ est contractible), alors que $\pi_1(S^1, 1) = \mathbf{Z}$.

Application amusante. Une feuille de papier couvre entièrement une table. Elle est froissée et reposée de nouveau sur la table. Montrer qu'il existe au moins un point de la feuille froissée qui se projète exactement sur sa position d'origine.

Remarque. Le théorème de Brouwer est vrai en toute dimension $D^n \subset \mathbf{R}^n$. Milnor en donne une démonstration totalement differente.

Definition. Deux espaces X, Y sont homotopes s'il existe $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ tels que $f \circ g \simeq id_Y$ et $g \circ f \simeq id_X$.

Exercice. Montrer que si $X \simeq Y$ alors les deux espaces ont des groupes fondamentaux qui sont isomorphes (l'argument est déjà dans les demonstrations qui précèdent).

$\boxed{\textbf{Orientation}}$. Nous prendrons le cas le plus simple d'une hypersurface dans $\mathbf{R}^n$, c'est a dire d'une variétdifferentiable de codimension 1. Une hypersurface M est non-orientable si le phénomène suivant se produit: il existe un lacet dans M tel que le vecteur normal lorsqu'il est transporté autour du lacet revient a sa position initiale dans la direction opposée. L'exemple le plus elementaire etant bien sur la bande de Moebius.

Etant donné un tel lacet γ, un vecteur normal (de longueur petit ϵ) deplacé autour de γ spans un ruban de Moebius D dont le bord est un lacet qui coupe (transversalement) M en un seul point. Il est possible de faire de sorte que D soit elle meme transverse à M, c'est à dire que D n'est pas tangente en aucun point à $M \in \mathbf{R}^n$. Puisque l'intersection de deux varietes transverses est une variete, $D \cap M$ est une collections de lacets ou de chemins avec les deux extremités sur γ. Mais $D \cap M = \{p\}$. Impossible.

Fait: Une hypersurface fermée sans bord dans $\mathbf{R}^n$ est necessairement orientée.

Theoreme: Deux sous-varietes de $\mathbf{R}^n$ de dimensions complementaires, sans bord et dont l'une au moins est compacte se coupent toujours (transversalement) en un nombre pair de points.

PROOF: C'est une generalisation de l'argument precedent.

Bibliographie.

[A] Michel Alessandri, *Thèmes de géométrie : groupes en situation gómétriques*, Agregation Math. Collection DUNOD.
[Ma] William Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Reprint of the 1967 edition (published by Harcourt, Brace World, Inc.). Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xxi+261 pp. ISBN 0-387-90271-6.
[Mi] John Milnor, *Topology from a differential viewpoint* Based on notes by David W. Weaver. Revised reprint of the 1965 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. xii+64 pp. ISBN: 0-691-04833-9.
[W] Joseph Wolf, *Spaces of constant curvature*. Fifth edition. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1984. xviii+412 pp. ISBN: 0-914098-07-1

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Ex. 1. Montrer que $M_n(\mathbf{R})$ est homéomorphe a $\mathbf{R}^{n^2}$ (et donc est une variété réelle de dimension n^2. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est ouvert dans $M_n(\mathbf{R})$ (et que tout ouvert d'une variété est egalement une variété de même dimension).

Ex.2. Montrer que si $\pi : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors la restriction $\pi_| : X - \{x_1, \ldots, x_n\} \longrightarrow Y - \{\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)\}$ est encore un homéo. Montrer que les nombres suivants qu'on peut associer à un espace topologique X

$a(X) =$ le plus petit nombre de points qu'il faut enlever à X pour le déconnecter

$b(X) =$ le plus grand nombre de points qu'on peut enlever de X sans le deconnecter

sont des invariants topologiques. En particulier, la lettre "A" et la lettre "B" peuvent-ils etre homéomorphes?

Ex.3. (1) Vérifier que la projection stéréographique $\phi : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ (ici $N = (0, \ldots, 0, 1)$) donnée par

$$\phi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}, 0 \right)$$

est un homéomorphisme. Pour cela on peut considérer $\psi : \mathbf{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}$ donnée par

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{1 + |x|^2} \left(2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n, |x|^2 - 1)\right)$$

(2) Construisez un homéo entre $\mathbf{R}^n$ et le disque ouvert D^n. *Pour le cas $n = 1$, on peut considérer $x \mapsto \tan(\pi(cx + d))$ pour des choix de c et d que vous preciserez.*
(3) Expliquer pourquoi le complément d'un cercle dans S^3 et le complément d'une droite dans $\mathbf{R}^3$ sont deux espaces homéomorphes.

Ex. 4. Montrer que S^1 ne peut etre homéomorphe à S^2, et que $\mathbf{R}^2$ ne peut être homéomorphe à $\mathbf{R}^3$.
Indication: pour la 2ieme question, pensez au groupe fondamental et à l'exercice 2..

Ex. 5. Vérifier que $SO(2) = S^1$ et que $SO(n)$ est connexe. Plus généralement montrer que si H agit sur G et que si H et G/H sont tous les deux connexes, alors G est forcément connexe (*indication*: les orbites gH etant connexes, toute application de $G \longrightarrow \{0, 1\}$ est constante sur les orbites).

Ex. 6. Soit $f, g : X \longrightarrow S^n$ telles que $f(x) \neq -g(x), \forall x \in X$. Montrer que $f \simeq g$.

Ex. 7. Si $f : S^n \longrightarrow S^n$ est sans points fixes, montrer qu'elle est homotope à l'application antipodale $T : x \mapsto -x$.

Ex. 8. Soit $f : X \longrightarrow \mathbf{R} - \{0\}$ continue. Montrer que f est homotope à une application g qui verifie $g(x)^2 = 1$ $\forall x \in X$.

Ex. 9. Montrer que $f : X \longrightarrow Y$ est une application nulle-homotope (c'est ịre $f \simeq c_{y_0}$) *si et seulement si* f admet une extension au cone de X; c'est à dire $\exists \bar{f}$ telle que

$$f : X \hookrightarrow cX \xrightarrow{\bar{f}} Y$$

Ex. 10. Le groupe tetraèdral $\mathbf{T} = G_{\{3,3\}}$. Notons par $v_1, v_2, v_3 v_4$ les 4 sommets du tetraèdre Δ_4, par e_{ij} l'arête entre v_i et v_j. Soit P la rotation d'angle π d'axe la droite passant par les milieux de e_{12} et e_{34} (et qui permute v_1 et v_2). Soit Q la rotation d'angle π d'axe la droite passant par les milieux de e_{13} et e_{24}. Finalement soit A la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ par rapport à la droite passant par v_1 et le centre de la face opposée. Verifier que

$$\mathbf{T} = \langle A, P, Q \mid A^3 = P^2 = Q^2 = 1, PQ = QP, APA^{-1} = Q, AQA^{-1} = PQ \rangle$$

Ex. 11. En utilisant que le groupe fondamental du cercle est $\mathbf{Z}$ (ou un de ses corollaires), justifier rigoureusement le pourquoi de l'affirmation dans la figure 10.

Ex. 12. Montrer que si un lacet γ est le bord d'un disque dans X ($x_0 \in \gamma$), alors $[\gamma] = \{1\}$ dans $\pi_1(X, x_0)$. Utiliser cette idée pour détérminer les groupes fondamentaux de toutes les surfaces (orientées ou non).

Ex. 13. On montre que le quotient $SO(n+1)/SO(n)$ est homeomorphe à S^n. Tout d'abord $SO(n)$ est vu comme un sous-groupe de $SO(n+1)$ via l'inclusion $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & A \end{pmatrix}$. Ecrivons $G = SO(n+1)$ et $H = SO(n)$. Le quotient G/H represente l'ensemble des orbites $gH = \{gh, h \in H\}$ (les "cosets"). Observons que G agit sur S^n (puisque les rotations préservent la norme). Une autre facon de représenter $SO(n)$ est alors de dire que c'est le sous-groupe de toutes les rotations qui préservent le vecteur $(1, 0, \dots, 0)^T \in S^n$ (on dit que $SO(n)$ est le *stabilisateur* de $(1, 0, \dots, 0)^T$ dans $SO(n+1)$)[12]. On définit donc l'application

$$SO(n+1)/SO(n) \longrightarrow S^n \quad , \quad A \cdot SO(n) \mapsto A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifier que cette application est bien définie et bijective. Elle sera aussi continue dans la topologie quotient et par suite est un homéomorphisme (voir critère p: 3).

[12] On écrit les points de $\mathbf{R}^n$ en lignes et les vecteurs en colonnes comme d'habitude.