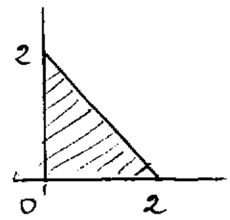
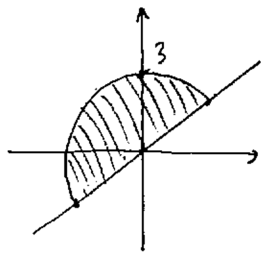
Quelques Exos Corrigés

Exo 1 : Pour chaque région indiquée, calculer $\iint_D y\,dx\,dy$



réponse : $\int_0^2 \int_0^{y-2} y\,dx\,dy = \dots$



réponse : La région se prête mieux aux coordonnées polaires.
On remarque que D en polaire est décrite par $\left\{(r,\theta) \mid \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 3 \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \end{array} \right\}$

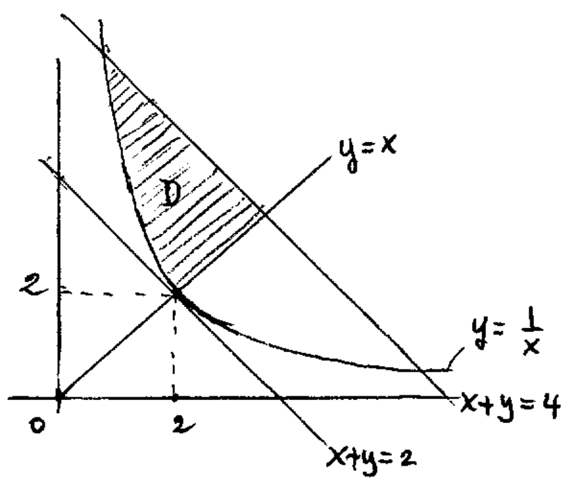
d'où $\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^3 \int_{\pi/4}^{\frac{5\pi}{4}} r\sin\theta \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA} = \int_0^3 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta$

$= \int_0^3 r^2 dr \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin\theta\,d\theta = \dots$

Exo 2 : Calculer l'intégrale suivante

$$\iint_D (x^2 - y^2)\cos(xy)\,dx\,dy$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x+y \leq 4 \ , \ 1 \leq xy \ , \ x \leq y\}$



en utilisant le changement de variables

$u = x+y$

$v = xy$

Réponse :

1) Montrons tout d'abord que $\phi : D \longrightarrow R$, $(x,y) \longmapsto (u,v)$ est bijective

où $R = \phi(D)$ est à préciser.

Pour $(x,y) \in D$,

$$\phi(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} x+y = u \\ xy = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = u-y \\ v = (u-y)y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = u-y \\ y^2 - uy + v = 0 \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation $y^2 - uy + v = 0$ est $\Delta = u^2 - 4v$

Pour (u,v) donné, l'existence de y demande que $\Delta \geq 0$

$\Rightarrow \quad \Delta = u^2 - 4v \geq 0$, soit $v \leq \frac{u^2}{4}$

La condition $x \leq y$ impose l'unique solution

$$x = \frac{u - \sqrt{u^2-4v}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{u + \sqrt{u^2-4v}}{2}$$

Ceci montre que ϕ est <u>injective</u> sur son image.

d'autre part $\begin{cases} 2 \leq x+y \leq 4 & \Rightarrow \quad 2 \leq u \leq 4 \\ xy \geq 1 & \Rightarrow \quad v \geq 1 \end{cases}$

En résumé, ϕ est une bijection de D sur R, où

$$R = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq u \leq 4 ,\ 1 \leq v \leq \frac{u^2}{4} \right\}$$

2) $$Jac_\phi(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(Jac_\phi(x,y)\right) = x - y$$

Le Jacobien est non nul dès que $x \neq y$

(Comme ϕ injective) Ceci implique que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathring{D}$ sur son image $\mathring{R}$.

[$\mathring{D}$ veut dire la partie ouverte de D, ou encore D privée de son bord]

3) On calcule l'intégrale

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D (x^2-y^2)\cos xy\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (x+y)(x-y)\cos xy\,dx\,dy$$

$$= -\iint_R u\cos v\,.\,du\,dv$$

pour ce passage, on utilise le fait que

$$du\,dv = |Jac_\phi(x,y)|\,dx\,dy = |x-y|\,dx\,dy = (y-x)\,dx\,dy$$

$$= -\iint_R u\cos v\,du\,dv = -\int_2^4\int_1^{u^2/4} u\cos v\,dv\,du$$

$$= -\int_2^4 u\,[\sin v]_1^{u^2/4}\,du = -\int_2^4 u\left[\sin\frac{u^2}{4} - \sin 1\right]du$$

$$= -2\cos 1 + 2\cos 4 + 6\sin 1$$

<u>Exo3</u> : Calculer l'intégrale double suivante

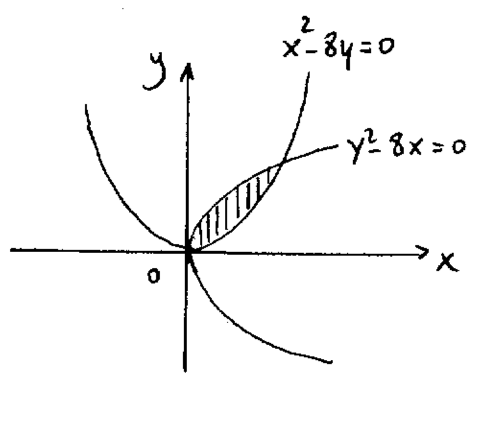
$$\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy \quad , \quad D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} y^2-8x\le 0 \\ x^2-8y\le 0 \end{array}\right\}$$

à l'aide du changement de vars suivant :

$$x = u^2 v \quad , \quad y = u v^2$$

<u>Réponse</u>

Domaine d'intégration



1) $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \longmapsto (x = u^2 v,\ y = u v^2)$

si $(x,y) \in D \iff \begin{cases} u^2v^4 - 8u^2v \leq 0 \\ u^4v^2 - 8uv^2 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} u^2v(v^3-8) \leq 0 \\ uv^2(u^3-8) \leq 0 \end{matrix}$

d'après la figure, nécessairement $x \geq 0, y \geq 0$, d'où $u \geq 0, v \geq 0$,

et donc $\begin{cases} v^3 - 8 \leq 0 & \text{et } v \geq 0 \\ u^3 - 8 \leq 0 & \text{et } u \geq 0. \end{cases}$

<u>Conclusion</u> : $\phi(D) = R = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 2\}$

2) $|\mathrm{Jac}_\phi(u,v)| = \begin{vmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{vmatrix} = 4u^2v^2 - u^2v^2 = 3u^2v^2$

3) D'après la formule du changement de variables

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x(u,v), y(u,v))\,|\mathrm{Jac}_\phi(u,v)|\,du\,dv$$

$$= \iint_R e^{\frac{u^6v^3 + u^3v^6}{u^3v^3}}\ 3u^2v^2\,du\,dv$$

$$= 3 \iint_R e^{u^3} e^{v^3} u^2 v^2\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 e^{u^3} u^2\,du \int_0^2 e^{v^3} v^2\,dv = \frac{1}{3}(e^8 - 1)^2$$