COURS 8+9 - M202

Rappelons que $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un C^1-difféo sur son image, si :

1) ϕ est bijective
2) ϕ est C^1 sur D
3) ϕ^{-1} est de classe C^1 sur $\phi(D)$

Théorème (Inversion locale)

Soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1.

$A \in D$ tel que $\det\left(Jac_\phi(A)\right) \neq 0$

Alors : $\exists$ une boule centrée en A, $B(A,\epsilon)$, $\epsilon > 0$, telle que la restriction de ϕ à cette boule est un C^1-difféo sur son image $\phi(B(A,\epsilon))$

[le théorème ne dit rien sur ϵ sauf son existence]

Corollaire :

Si $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est C^1 et $\det Jac_\phi(A) \neq 0$, $\forall A \in D$

et si ϕ est bijective sur son image,

Alors

ϕ est un C^1-difféomorphisme de D sur $\phi(D)$ [et ϕ^{-1} est C^1]

Ex : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (e^x - e^y,\ x+y)$$

Montrer que f est un chgt de vars (ou C^1-difféo).

réponse :

f est C^1 et bijective (déjà fait)

méthode 1 : on peut résoudre explicitement pour f^{-1}

et voir directement qu'elle est C^1

Ceci a été déjà fait :

$$f^{-1}(u,v) = \left(\ln\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4e^v}}{2}\right),\ v - \ln\left(\cdots\right)\right)$$

<u>méthode 2</u> : On utilise le théorème d'inversion locale

$$Jac_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = e^x + e^y > 0$$

D'après le corollaire précédent, f^{-1} est C^1 partout sur $\mathbb{R}^2$

[Noter que cette méthode est plus rapide mais elle ne donne pas une expression pour f^{-1}].

<u>EX</u> : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$

f est-elle un C^1-difféo <u>sur $\mathbb{R}^2$</u> ?

<u>Rép</u>:

•) f est C^1

•) $\det Jac_f(x,y) = e^x \neq 0$

mais ! $f(0,0) = f(0,2\pi) = (1,0)$ et f n'est pas bijective

f n'est pas un C^1-difféo bien que $\det Jac_f$ partout non nul.

<u>EX : (Coordonnées Polaires)</u>

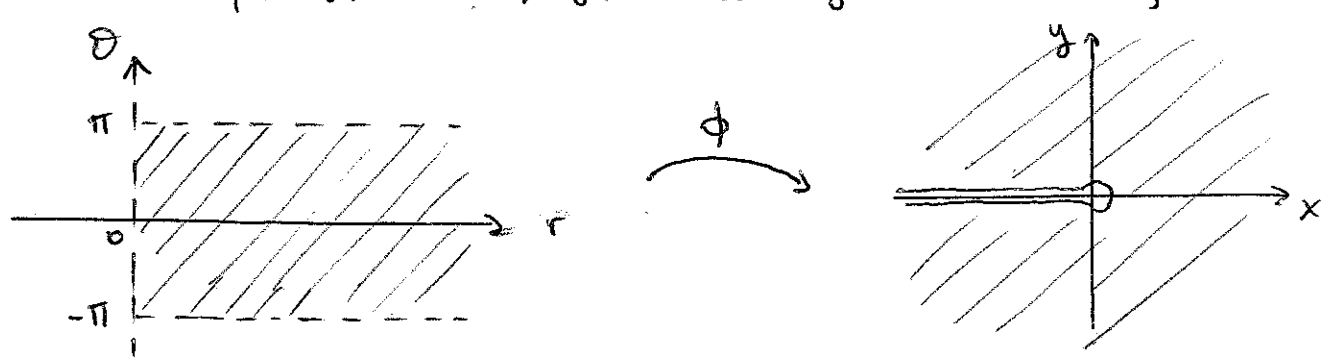
$U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$

$\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

Montrons que ϕ est un C^1-difféo de U sur

$$U' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ ou } (y=0 \text{ et } x>0)\}$$



- ϕ est clairement C^1
- $(r,\theta) \in \mathcal{U}$, $\phi(r,\theta) = (x,y) \iff \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} > 0 \\ \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$

Si $y=0$, $\sin\theta = 0$ et donc $\theta = 0$

(car $\theta \in]-\pi,\pi[$)

d'où $x = r\cos 0 = r > 0$

On a bien que $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}'$

On vérifie que ϕ est bijective en utilisant le fait que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\alpha^2+\beta^2 = 1$, $\exists$ unique $\theta \in [-\pi,\pi]$ tel que

$$\alpha = \cos\theta \quad \text{et} \quad \beta = \sin\theta$$

- $\text{Jac}_\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det \text{Jac}_\phi(r,\theta) = r > 0$ sur $\mathcal{U}$

Conclusion : ϕ est un chgt de vars de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$.

Retour sur inversion locale : une autre façon d'exprimer ce résultat est de la façon suivante :

__Théorème (Inversion locale)__ : Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $A \in \mathcal{U}$ et supposons $\text{Jac}_f(A)$ est une matrice inversible (c'est à dire de déterminant non nul). Alors il existe un voisinage V de A dans $\mathcal{U}$ et un voisinage W de $f(A)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que f soit un C^1 difféomorphisme de V sur W.

__Remarque 1 :__

Au point A, la fonction f est localement bijective.

f sur $\mathcal{U}$ peut par contre ne pas être bijective, so

Remarque 2 :

La condition C^1 est fondamentale : il faut que les derivées soient continues au point A pour que le théorème soit valable.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{\pi}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

[ici $n=1$ et $A=0$ dans le théoreme].

Cette fonction est continue en 0.

Sa dérivée en 0 est non nulle

Mais f n'est pas injective dans aucun voisinage de 0. En particulier f n'est pas localement bijective en 0

Exo : Posons $u = u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$v = v(x,y,z) = xy + yz + zx$$

Determiner un domaine maximal $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ tel que au voisinage de tout point $P \in \mathcal{U}$, les fonctions (u,v,x) forment un systeme de coordonnées. C'est à dire $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \phi(\mathcal{U})$ soit localement un C^1 diffeo.

$$(x,y,z) \longmapsto (u,v,x)$$

Rép :

D'aprés le théorème I.L, il suffit de trouver un ouvert maximal $\mathcal{U}$ tel que pour tout $P \in \mathcal{U}$, $\det Jac_\phi(P) \neq 0$.

$$Jac_\phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ y+z & x+z & y+x \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det Jac_\phi(x,y,z) = 2y(y+x) - 2z(z+x)$$

$$= \text{calcul}$$

$$= 2(y+z)(y-z-x)$$

On choisit $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z \neq 0 \text{ et } y-z-x \neq 0\}$

" $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ privé des plans $y+z=0$ et $y-z-x=0$ "

Règles de Composition

Considérons les fonctions de plusieurs vars f et g qu'on supposera de classe C^1 : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

On supposera également que $\mathrm{Im} f \subset D_g$, et donc on peut composer f par g. On écrira :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big) = (u_1, \dots, u_m)$$

Alors on a les formules de dérivation suivantes : $A \in D_f$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_1}(A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_i}\{f(A)\} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1}(A)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_n}(A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_i}(f(A)) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_n}(A)$$

On notera plus simplement et "abusivement"

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_j}$$

<u>Ex</u> : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (u, v)$$

$$\phi = g \circ f$$

alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

<u>Ex</u> : $f(x, y) = (x - y, xy)$

$$g(u, v) = e^u + e^v$$

Nous allons déterminer $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}$ et $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}$ par 2 méthodes

Méthode 1

. $g\circ f(x,y) = e^{x-y} + e^{xy}$. Posons $\phi = g\circ f$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^{x-y} + y e^{xy} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -e^{x-y} + x e^{xy}$$

Méthode 2 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = e^{u}.1 + e^{v}.y$$
$$= e^{x-y} + y e^{xy}$$

$u = x-y$
$v = xy$

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\phi = g\circ f$
$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$; $(x,y) \mapsto g(x,y)$

$$\phi(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta . \frac{\partial g}{\partial x} + \sin\theta . \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta . \frac{\partial g}{\partial x} + r\cos\theta . \frac{\partial g}{\partial y}$$

Prop : (Jacobienne d'une composée)

Soit $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ deux fonctions C^1, $\mathrm{Im} f \subset D_g$

Soit $A \in D_f$. Alors :

$$\mathrm{Jac}_{g\circ f}(A) = \underbrace{\mathrm{Jac}_g(f(A)) . \mathrm{Jac}_f(A)}_{\text{produit matriciel}}$$

Preuve :

Ecrire $$\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial u_\ell} f(A) . \frac{\partial u_\ell}{\partial x_j}(A)$$ $u_\ell = f_\ell(x_1,\dots,x_n)$

$$\mathrm{Jac}_{g\circ f}(A) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_1}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_1}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \sum \frac{\partial g_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \end{bmatrix} (A)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(f(A)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_k}{\partial u_1} f(A) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial u_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(A) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Jac}_g(f(A)) \cdot \mathrm{Jac}_f(A)$$

Equations aux dérivées Partielles (EDP)

Soit p un entier

On appelle équation aux dérivées partielles d'ordre p une équation de la forme

$$(E) \quad F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^k \partial y^{p-k}}\right) = 0$$

où f est une fonction de 2 vars

__Def__ : Une solution de l'équation (E) sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est une fonction f de classe C^p sur D qui vérifie à cette équation.

__Ex__ : $(E) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Une solution est $f(x,y) = xy$ sur $\mathbb{R}^2$

Ex : (E) $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$

une solution de cette équation est toute fonction ($C^1, C^2, \ldots$) de "2 variables constante en y" : $f(x,y) = g(x)$

Ex : (E) Equation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Les solutions sont appelées fonctions harmoniques.

Verifiez que $f(x,y) = e^x \sin y$ est harmonique

Résultat fondamental : ($p=1$ ou ordre 1)

Soit $\mathcal{U} =]\alpha, \beta[\times]a,b[$ un "pavé" ouvert

$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \exists$ une application $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in \mathcal{U}$, $f(x,y) = \phi(y)$

[Résultat analogue pour $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$]

Une extension de ce résultat est la suivante :

Une solution de l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ [f inconnue, de classe C^1, g donnée] sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est obtenue en primitivant g par rapport à x et en rajoutant une fonction quelconque de classe C^1 de la var. y.

Ex : résoudre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2$$

Rép :

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + \phi(y)$$

avec $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction C^1.

Méthode de Résolution d'une EDP d'ordre 1 par changt. de vars.

Supposons $F(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=0$ est une EDP sur domaine $D\subset\mathbb{R}^2$.

Il est parfois possible par un changt de vars $\phi : D \to D'$ de transformer cette EDP en une nouvelle EDP sur D' plus simple à résoudre.

L'idée donc est de considérer la nouvelle fonction $g : D' \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g = f\circ\phi^{-1} \qquad \text{et} \qquad f = g\circ\phi$$

Le diagramme suivant est utile :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & D' \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$f : D \xrightarrow{\phi} D' \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto (u,v) \longmapsto g(u,v) = f(x,y)$$

Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

ou encore "abusivement"

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \qquad (*)$$

Ceci comme on l'a vu revient à écrire : $\mathrm{Jac}_f = \mathrm{Jac}_{g\circ\phi} = \mathrm{Jac}_g\cdot\mathrm{Jac}_\phi$

c'est à dire encore :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right)\cdot \mathrm{Jac}_\phi(x,y)$$

En remplaçant $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ par $\left(\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v}\right)\cdot\mathrm{Jac}_\phi(x,y)$;

on transforme l'EDP1 $F(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=0$ en une nouvelle EDP2 $G(u,v,g,\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v})$ qu'on espère pouvoir résoudre plus simplement.

<u>Le point</u> : $\boxed{f \text{ solution de EDP1 sur } D \iff g \text{ solution de EDP2 sur } D'}$

Exemple : Résoudre sur $D = \mathbb{R}^2$ l'EDP

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \qquad (E)$$

Réponse :

considérons $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (u,v) = (x, x+2y)$$

$$\mathrm{Jac}_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det \mathrm{Jac}_\phi(x,y) = 2$$

On vérifie que ϕ est bijective donc ϕ est bien un C^1-difféo.

Posons $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g = f \circ \phi^{-1}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Alors :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}, 2\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

On remplace dans EDP (E) :

on trouve :

$$(E') : \quad 2\frac{\partial g}{\partial u} = 2u$$

Une solution générale de (E') comme on a vu est :

$$g(u,v) = \frac{u^2}{2} + h(v) \qquad h \text{ fonction quelconque de classe } C^1$$

et par suite une solution générale de (E) est

$$f(x,y) = g(x, x+2y) = \frac{x^2}{2} + h(x+2y).$$

$\blacksquare$

EXO : Soit f une fonction C^1 satisfaisant EDP

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x^2+y^2)$$

1) Réécrire cette EDP en coordonnées polaires

2) Montrer que toute solution de (E) est bornée sur

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ ou } (y=0 \text{ et } x>0)\}$$

Réponse : Considérons le changt de vars en polaire

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\phi(x,y) = (r,\theta)$

$\phi^{-1}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$

$g = f \circ \phi^{-1}$ et $f = g \circ \phi$ [c'est à dire $g(r,\theta) = f(x,y)$]

On veut exprimer :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}\right) \cdot Jac_\phi(x,y)$$

On connait :

$$Jac_{\phi^{-1}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Or : $\phi \circ \phi^{-1} = id$

$$\Rightarrow \quad Jac_\phi(x,y) = Jac_{\phi^{-1}}(r,\theta)^{-1}$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ceci donne :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

(1)
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\sin\theta \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\cos\theta \end{aligned}}$$

$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

Notons que l'écriture $Jac_g = Jac_{f\circ\phi^{-1}} = Jac_f \cdot Jac_{\phi^{-1}}$ donne

(2)
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\sin\theta \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, r\cos\theta \end{aligned}}$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

On transforme notre EDP en utilisant système (1)

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \quad \sin(r^2) = r\cos\theta \left[\frac{\partial g}{\partial r} . \cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} \sin\theta \right] + r\sin\theta \left[\frac{\partial g}{\partial r} \sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} \cos\theta \right]$$

$$= r \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$(E') : \quad \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\sin(r^2)}{r}.$$

Conclusion :

f est solution de (E) sur $\mathcal{U}$ $\Leftrightarrow$ g est solution de (E') sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$

La résolution de g peut se faire de la manière suivante.

$$g(r,\theta) = \int_1^r \frac{\sin u^2}{u} du + h(\theta) \qquad \text{où } h \text{ fonction } C^1$$

Il n'est pas difficile de voir que $\int_1^r \frac{\sin u^2}{u} du$ est bornée (DM).

FIN EXO