On rappelle que f est de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^2$ si les D.P.P de f existent et sont continues en tout point de D.

On note $C^1(D)$ l'ensemble des applications C^1 de D dans $\mathbb{R}$

Théorème A

Soit f une fonction de classe C^1 dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ [en particulier $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent à proximité de a et sont continues en a]

Alors f est différentiable au point a.

En particulier

1) f est continue au point a

2) Les dérivées directionnelles suivant $\vec{v} \neq \vec{0}$ au point $a \in D$ existent et sont continues

De plus si $\vec{v} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$, alors $D_{\vec{v}} f(a) = \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

3) Une équation du "plan tangent" au point $a = (a_1, \dots, a_n)$ au graphe de $z = f(x_1, \dots, x_n)$ est

$$z = f(a_1, \dots, a_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x - a_n)$$

Ex : Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$, où f est donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (0,0) \end{cases}$$

réponse :

•) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions C^1

$\Rightarrow f$ est diff^{le} sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

• Différentiabilité en $(0,0)$

On vérifie que f est continue en $(0,0)$

Cherchons les D.P.P en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Si f était diff. en $(0,0)$, alors $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ serait nulle

Or ce quotient est $\displaystyle\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \cos\theta\sin^2\theta$ passage en polaire

et sa limite en $(0,0)$ [lorsque $r\to 0$] n'existe pas !

Conclusion. f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Nous ne démontrons pas le théorème A, mais nous allons montrer son corollaire sur la continuité de f en a :

<u>Lemme</u> : Si f est C^1 dans un voisinage de $a \in D$, alors f est continue en a

Pour cela, on rappelle.

<u>Théorème</u> : (Accroissements finis)

Soient $a<b$ deux réels. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

et son corollaire

<u>Corollaire</u> (Inégalité des accroissements finis)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Avec les hypothèses précédentes}\\ \text{et de plus}\\ M = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| \text{ existe (est fini)}\end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq M|x-a| \quad \forall x \in [a,b]$$

Exo : DM

Montrer que $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\ln(1+x) \leq x$, $\forall x \geq 0$

Preuve du Lemme :

Soit f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, c' dans ce voisinage $a+h$ dans ce voisinage pour h "petit"

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2)$$

$$= \underbrace{f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1,a_2)}_{\text{première coordonnée "varie", seconde constante}} + \underbrace{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2)}_{\text{inverse}}$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$\exists\, c_1 \in]a_1, a_1+h_1[$ et $\exists\, c_2 \in]a_2, a_2+h_2[$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, c_2)\, h_2$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sont continues en $(a_1 a_2)$, la limite de cette différence lorsque $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$ est

$$\lim_{h \to (0,0)} \left(f(a+h) - f(a)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\cdot 0 = 0.$$

⊠

Remarque : Une fonction f peut admettre des derivées partielles par rapport à chacune de ses variables en un point sans être continue en ce point. Mais si toutes ces ~~des~~ DPP sont continue sur un ouvert U autour de ce point, alors f est continue

Vecteur et Champ Gradient

Soit f une fonction diff° au point $P = (a,b)$

Alors f admet des dérivées directionnelles suivant tout vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$D_{\vec{v}}f(a,b) = df(\vec{v})$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(P)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot v_2 \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \partial f/\partial x(P) \\ \partial f/\partial y(P) \end{pmatrix} \circ \vec{v}$$

Si on pose $\overrightarrow{grad}_f(P) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x(P) \\ \partial f/\partial y(P) \end{pmatrix} =: \nabla_P f$ ou encore $\nabla f(P)$

le "vecteur gradient" au point P, alors

$$D_{\vec{v}}f(P) = \nabla f(P) \circ \vec{v}.$$

<u>Ex</u> : Soit $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$, $\vec{u}$ = vecteur unitaire d'angle $\frac{\pi}{6}$

$D_{\vec{u}}f(1,2)$?

<u>Rép</u> :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ -3x + 8y \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

d'où

$$D_{\vec{u}}f(1,2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(13 - 3\sqrt{3}\right).$$

<u>Définition</u> : lorsque f admet des DPP en tout point de $D \subset \mathbb{R}^2$, alors on appelle "∇f" le champ gradient

$$\nabla f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$
$$(x,y) \longmapsto \nabla f(x,y)$$

<u>Propriétés</u>

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g \qquad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$\nabla(f \cdot g) = f \nabla g + g \nabla f$$

...

Propriété / Théorème :

f diffˡᵉ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, $P \in D$. Alors la valeur maximale des dérivées directionnelles au point P suivant des vecteurs unitaires est $\|\nabla f(P)\|$, et elle est atteinte dans la direction et le sens du vecteur gradient.

Preuve :

$\vec{u}$ unitaire, $D_u f(P) = \nabla f(P) . \vec{u} = \|\nabla f(P)\| . \|\vec{u}\| \cos\theta$

$$= \|\nabla f(P)\| . \cos\theta$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\nabla f(P)$ et $\vec{u}$, $\theta \in [0, \pi]$

le maximum de $\cos\theta$ vaut 1 en $\theta = 0$, c'est à dire lorsque $\vec{u}$ et $\nabla f(P)$ ont même direction et même sens.

Ex : Determiner le taux de variation de f défini par $f(x,y) = xe^y$ au point $P = (2,0)$ dans la direction de P au point $Q = (\frac{1}{2}, 2)$

Dans quelle direction f varie t-elle le plus vite ?

Quelle est cette vitesse de variation maximale ?

Rép :

•) $\nabla f(2,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

•) La direction est determinée par le vecteur unitaire de P à Q :

$$\vec{u} = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} = \frac{2}{5}\left(-\frac{3}{2}, 2\right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

le taux de variation de f dans la direction de $\vec{PQ}$ est

$$D_{\vec{u}} f(2,0) = \nabla f(2,0) . \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = 1 .$$

•) Le taux maximum est $\|\nabla f(2,0)\| = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5}$

Gradient et Ligne de niveau

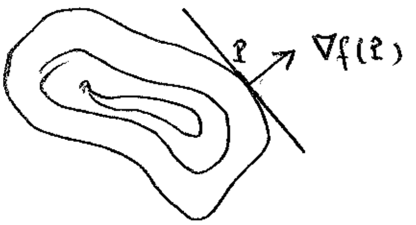
<u>Proposition</u> : Le gradient en un point $P \in D_f$ est orthogonal à la ligne de niveau en ce point.

Le gradient indique la direction de plus forte croissance de f en P

<u>Ex</u> : Carte géographique :

Une ligne de niveau indique une altitude constante.

Le gradient indique la direction de plus forte pente.



<u>Preuve de la proposition</u> : (esquisse)

$\gamma : I \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ un chemin paramétré

$t \longmapsto (x(t), y(t))$, $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$

Si γ est diff$^{\underline{o}}$ en t_0, et f est diff$^{\underline{o}}$ en $\gamma(t_0)$, alors $f\circ\gamma$ est diff$^{\underline{o}}$ en t_0.

$$(f\circ\gamma)'(t_0) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=t_0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot y'(t_0) \quad \ldots$$

dérivée de la composition : détail + tard

$$= \nabla f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0)\end{pmatrix}$$

$$= \nabla f(x_0,y_0)\cdot\dot\gamma(t_0)$$

↳ vecteur tangent à la courbe $\gamma(t)$ dans $\mathbb{R}^2$ au point (x_0, y_0)

Donc si $\gamma(t)$ = constante (comme pour le cas d'une courbe de niveau) alors $f\circ\gamma(t)$ est constante, de dérivée (% à t) nulle

$$\Rightarrow (f\circ\gamma)'(t_0) = 0 \Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) \perp \dot\gamma(t_0).$$

<u>Exo</u> (DM) :

Montrer qu'une fonction diff$^{\underline{o}}$ décroît le plus rapidement en P dans la direction opposée à celle du gradient en ce point.

Exo : Soit une montagne de hauteur

$$h(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$$

Une bille posée au point $(1, \frac{1}{2}, h(1,\frac{1}{2}))$ roulerait dans quelle direction ?

rép :

$$\nabla h\left(1, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La bille roulerait dans la direction opposée, c.à.d Nord-Nord Est.