Cours IV - M102

Les D.P.P :

Exo : La température T en un lieu de l'hemisphère nord dépend de la latitude x, longitude y et temps t :

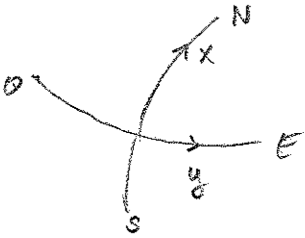
$$T = f(x, y, t)$$

$\frac{\partial T}{\partial t}$ = taux de variation de la température lorsque seule la latitude change

$\frac{\partial T}{\partial x}(21°, 158°, 7h) < 0$: Interprétez ?

(Honolulu est située à 158° longitude O, 21° latitude N)

A 7h du matin à Honolulu, si on se déplace vers le nord, alors la température aura tendance à se rafraichir.



Exo :

Trouver les D.P.P de

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (0,0) \end{cases}$$

Rép :

- $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \dots$$

- en $(0,0)$: on utilise la définition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Remarque : les D.P.P peuvent exister sans que la fonction soit continue

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

Les D.P.P décrivent le comportement de f le long de l'axe des x ou de l'axe des y. Que peut-on dire pour tout autre axe ?

On sait que :

La droite passant par le point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et ayant pour vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \end{cases}$$

Etudier la fonction f le long de cette droite revient à considérer la fonction composée

$$F : t \longmapsto f(\alpha t + a, \beta t + b)$$

Définition : On appelle la derivée de f dans la direction de $\vec{v}$ au point (a,b) le nombre réel

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a,b) := D_{\vec{v}} f(a,b)}_{\text{notation}} := F'(0) = \frac{d}{dt} f(\alpha t + a, \beta t + b)\Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha t + a, \beta t + b) - f(a,b)}{t}$$

Cas particuliers :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \vec{i}} , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \vec{j}}$$

Plus généralement :

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ admet une D.D le long de $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ au point $A \in \mathbb{R}^n$

si $$D_{\vec{v}} f(A) := \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t} \quad \text{existe}$$

où

$$f(A + t\vec{v}) = f(a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n) , \quad A = (a_1, \dots, a_n)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

<u>Exo</u> : Calculer $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(x,y) = x+y$

<u>Rép</u> :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2t}{t} = 2$$

<u>Exo</u> : Pour quelles directions de droite $\vec{v}$ les D.D de

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (0,0) \end{cases}$$ existent-elles en $(0,0)$?

<u>Rép</u> :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha t, \beta t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha t \beta t}{t [\alpha^2 t^2 + \beta^2 t^2]}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0 \\ \pm\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ existe $\iff$ $\vec{v} = \alpha \vec{i}$, $\alpha \neq 0$ ou $\vec{v} = \beta \vec{j}$, $\beta \neq 0$

<u>Remarque</u> :

La dérivée directionnelle de f suivant $\vec{u} \neq \vec{0}$ est le taux de variation de f dans cette direction

Différentiabilité

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ fonction définie au voisinage de $A \in \mathbb{R}^n$.
" On souhaiterait trouver une condition sur f qui assurerait l'existence des D.D $\lim_{t \to 0} \frac{f(A+t\vec{v}) - f(A)}{t}$ pour tout $\vec{v} \neq \vec{0}$. "

Définition : Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie au vois. de $A = (a_1, \dots, a_n)$.
On dit que f est différentiable en A si $\exists$ des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.q

$$(*) \quad \lim_{(h_1,\dots,h_n) \to (0,\dots,0)} \frac{f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) - f(a_1,\dots,a_n) - \alpha_1 h_1 - \dots - \alpha_n h_n}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|\vec{h}| \to 0} \frac{f(A+\vec{h}) - f(A) - df_A(\vec{h})}{|\vec{h}|} = 0$$

où on a écrit :

$$df_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{application \underline{linéaire}}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

Remarque : f est différentiable en A, alors f est continue en A

Exemple : cas d'une variable : $n=1$

$$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a \in I$$

f dérivable en a

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \text{ existe.}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - h f'(a)}{h} = 0$$

Dans ce cas, la différentielle est :

$$df_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(a).x$$

$\alpha_1 = f'(a)$ dans la notation de $(*)$

<u>Remarque</u> : $n=1$ toujours

f dérivable en $a \in I$ $\iff$ f admet un DL en a

$\iff$ $f(a+h) = f(a) + \alpha h + h\,\epsilon(h)$ avec $\epsilon(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$

la droite $y = f(a) + \alpha h = f(a) + f'(a)(x-a)$

est l'équation de la droite tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de f.

Dimension supérieure $n>1$: On peut dire que f est diff° en $A \in \mathbb{R}^2$

si f admet "un D.L" en A de la forme

$$f(A+\vec{h}) = f(A) + df_A(\vec{h}) + |\vec{h}|\,\epsilon(\vec{h}) \quad \text{avec } \epsilon(\vec{h}) \xrightarrow{\vec{h} \to \vec{0}} 0$$

<u>Proposition</u> : Si f est diff° au point $A \in \mathbb{R}^2$, alors pour tout $\vec{v} \neq \vec{0}$

f admet une dérivée directionnelle suivant $\vec{v}$ en A, et

$$D_{\vec{v}} f(A) = df_A(\vec{v})$$

[En particulier les dérivées partielles existent].

<u>Preuve</u>:

f est diff°. Posons $\vec{h} = t\vec{v}$, $|\vec{h}| = t$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$,

df_A étant linéaire, $df_A(t\vec{v}) = t\,df_A(\vec{v})$

On a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(A+t\vec{v}) - f(A) - df_A(t\vec{v})}{t\|\vec{v}\|} = 0 \quad \text{car } f \text{ est diff°}.$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+t\vec{v}) - f(A) - t\,df_A(\vec{v})}{t}$$

?

$$\Rightarrow \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(A+t\vec{v}) - f(A)}{t} = df_A(\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad D_{\vec{v}} f(A) = df_A(\vec{v})$$

<u>Conséquence</u> :

Si f n'admet pas de D.D en A le long d'un vecteur $\vec{v}$, alors f n'est pas diff°.

Exo : Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \end{cases}$

$A = (0,0)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que f n'admet pas de D.D en A suivant $\vec{v}$. Conclure.

Proposition : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en A. Alors

$$df_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(A).x + \frac{\partial f}{\partial y}(A).y$$

[avec les notations précédentes de (*) : $\alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\alpha_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(A)$]

Preuve : Ecrivons $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$df_A(\vec{v}) = df_A(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\,df_A(\vec{i}) + y\,df_A(\vec{j}) \quad \text{... linéarité de } df_A$$

$$= x\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(A) + y\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(A) \quad \text{... d'après la Proposition précédente}$$

$$= x\frac{\partial f}{\partial x}(A) + y\frac{\partial f}{\partial y}(A)$$

Récapitulation :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definie au vois. de A

f est differentiable en A

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{f(a+x,b+y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

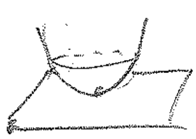
$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

Consequence : Plan tangent :

Le graphe de f admet un plan tangent au point $(a,b,f(a,b)) \in \mathbb{R}^3$, et ce plan a pour équation

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

no



<u>Exo</u> : Determiner le plan tangent au paraboloïde

$z = 2x^2 + y^2$ au point $(1,1,3)$

Rép :

Soit $f(x,y) = 2x^2 + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$

$\Rightarrow \quad z = 4x + 2y - 3$

<u>Exemple Important</u> :

$$\text{soit} \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (0,0) \end{cases}$$

- Montrer (DM) que g est continue en $(0,0)$, et admet en ce point des derivées directionnelles selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$
- Montrer que, cependant, g n'est pas différentiable en $(0,0)$

[Prochain cours, on donnera une condition suffisante sur les DD (i.e la continuité ?) pour qu'une fonction soit différentiable.