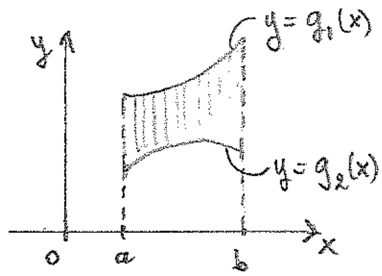
COURS 11 → M202

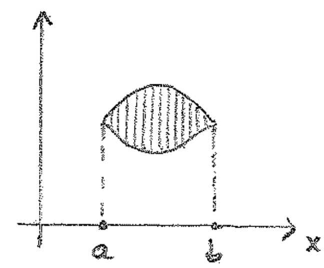
Intégrales Itérées : Domaines élémentaires

Deux types de domaines élémentaires

Type I : $D \subset \mathbb{R}^2$ est de type I si D est de la forme

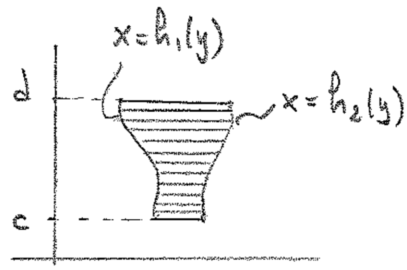
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \,,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

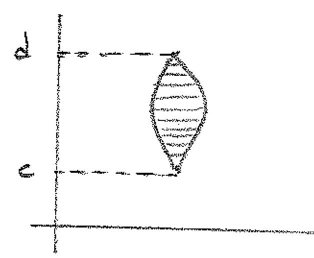




Type II. $D \subset \mathbb{R}^2$ est de type II si D est de la forme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \,,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$





D'après les constructions et définitions du cours précédent, nous avons :

Proposition : Soit f continue sur D

1) Si $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \,,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, alors

$$\iint_D f \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \, dy \, dx$$

2) Si $D = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d \,,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, alors

$$\iint_D f \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \, dx \, dy$$

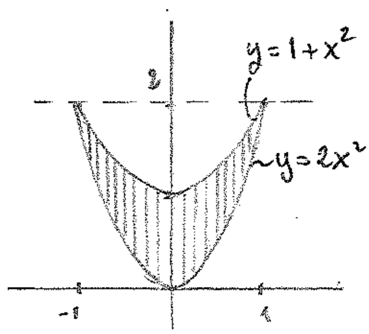
Pour calculer une intégrale double sur un domaine élémentaire, ou la juxtaposition de domaines élémentaires, le <u>DESSIN EST IMPORTANT</u>

<u>EXO 1 :</u> Soit D délimité par les paraboles $y = 2x^2$ et $y = 1 + x^2$.

Calculer $\iint_D (x + 2y)\, dA$

<u>Rép :</u>

Tout d'abord on représente graphiquement le domaine D



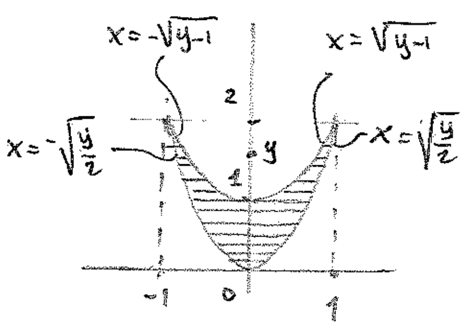
Les deux courbes s'intersectent aux points $(1,2)$ et $(-1,2)$

La région est bien de type I, et donc pour calculer $\iint_D$, il est plus simple de fixer x tout d'abord et faire varier y, puis intégrer par rapport à x.

$$\iint_D (x+2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2 \right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx = \frac{32}{15}$$

<u>Question supplémentaire</u> : retrouver ce calcul en intégrant tout d'abord par rapport à x puis par rapport à y (c'est à dire réécrire cette intégrale en intervertissant l'ordre des variables).



Fixons y.

Essayons de voir pour y fixé les variations de x tel que $(x, y) \in D$

- Si $1 \leq y \leq 2$.
  Alors x varie entre les courbes $-\sqrt{\frac{y}{2}}$ et $-\sqrt{y-1}$ puis entre $\sqrt{y-1}$ et $\sqrt{\frac{y}{2}}$
- Si $0 \leq y \leq 1$, alors x varie entre les courbes $-\sqrt{\frac{y}{2}}$ et $\sqrt{\frac{y}{2}}$

On peut donc écrire

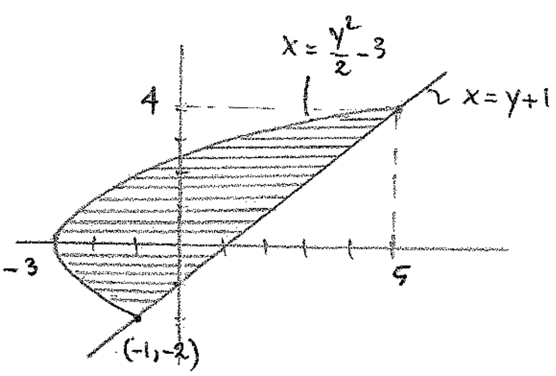
$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy = \int_1^2\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{-\sqrt{y-1}} (x+2y)\,dx\,dy + \int_1^2\int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (x+2y)\,dx\,dy + \int_0^1\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (x+2y)\,dx\,dy$$

Comme on le voit, cette expression est beaucoup plus longue à calculer

<u>Exo2</u> : Calculer $\iint_D xy\,dA$ où D est le domaine borné par la droite $y = x-1$ et la parabole $y^2 = 2x+6$

<u>Réponse</u> :

On peut intégrer de deux façons : suivant x tout d'abord puis y (type I), ou bien suivant y puis x (type II). Le dessin nous suggère la méthode la plus rapide.



On peut réécrire (type II)

$$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} -2 \leq y \leq 4 \\ \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y+1 \end{array} \right\}$$

d'où

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-2}^{4}\int_{y^2/2-3}^{y+1} xy\,dx\,dy$$

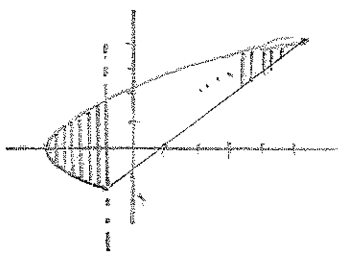
$$= \int_{-2}^{4} \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=\frac{y^2}{2}-3}^{x=y+1} dy.$$

$$\Rightarrow \iint_D xy\,dA = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left(-\frac{y^4}{4} + 4y^2 + 2y - 8\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2\right]_{-2}^{4} = 36$$

Si on devait refaire ce calcul en découpant D en domaines de type I, on obtiendrait 2 morceaux : $-3 \leq x \leq -1$, $-\sqrt{2x+6} \leq y \leq \sqrt{2x+6}$

et $-1 \leq x \leq 5$, $x-1 \leq y \leq \sqrt{2x+6}$



d'où

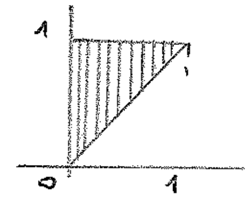
$$\iint_D xy\,dA = \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx + \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx.$$

Exo 3 : Calculez l'intégrale itérée $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx$

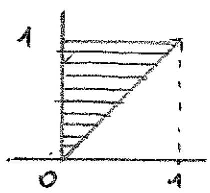
Réponse

· D = région d'intégration

$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 ,\ x \leq y \leq 1\}$: type I



Nous ne connaissons pas de primitive facile à exprimer de $\sin(y^2)$. Peut-être en intervertissant l'ordre des vars peut on obtenir une intégrale plus facile à calculer:



Pour y fixé entre 0 et 1, x varie entre 0 et y.

d'où

$$\iint_D \sin(y^2)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^y \sin y^2\, dx\, dy = \int_0^1 \left[x \sin y^2\right]_{x=0}^{x=y} dy$$

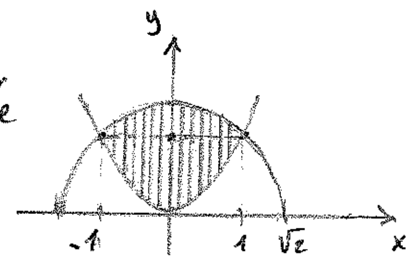
$$= \int_0^1 y \sin(y^2)\, dy = \left[-\frac{1}{2}\cos y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

Exo 4 :

Determiner l'aire A de la région du demi-plan d'équation $y \geq 0$ délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$ et l'arc de cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2$.

Réponse :

$A = \iint_D dA$ où D est la région hachurée



$$= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy\, dx$$

$$= 2\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy\, dx = 2\int_0^1 \left(\sqrt{2-x^2} - x^2\right) dx = 2\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\, dx - 2\int_0^1 x^2\, dx$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\, dx - \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\, dx \underset{\substack{\text{chang}^t \\ \text{de vars } x = \sqrt{2}\cos\theta}}{=} -2\int_{\pi/2}^{\pi/4} \sqrt{2-2\cos^2\theta}\, \sin\theta\, d\theta = 2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \underset{\sin^2\theta = \frac{1-\sin 2\theta}{2}}{=} \cdots$$

Changement de variables

Supposons donné $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, I "difficile" à calculer

L'idée est de choisir de nouvelles coordonnées (s,t) tel que $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, et que la réécriture de I avec de telles coordonnées donne une nouvelle expression plus facile à calculer

Def: Soit $K \subset \mathbb{R}^2$

K est compact si K est fermé et borné

Par exemple, le disque de rayon 1 avec son bord qui est le cercle est compact.

On notera $\overset{\circ}{K}$ = intérieur de K , c'est à dire

$$\overset{\circ}{K} = \{ x \in K \text{ tel que } \exists \text{ boule } B(x,\epsilon),\ \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \subset K \}$$

Théorème :

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\Psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une applicat° C^1

$$\Psi : (s,t) \longmapsto (x(s,t),\ y(s,t))$$

Soit K un compact élémentaire inclus dans $\mathcal{U}$.

Si les conditions suivantes sont réalisées :

i) L'ensemble $D = \Psi(K)$ est un compact

ii) la restriction de Ψ à $\overset{\circ}{K}$ est injective

iii) le Jacobien de Ψ ne s'annule pas sur $\overset{\circ}{K}$

Alors pour toute fonction f continue sur D dans $\mathbb{R}$, on a

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_K f(x(s,t),y(s,t))\ |\mathrm{Jac}\,\Psi(s,t)|\ ds\,dt$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr] & D \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exemple (Coordonnées polaires)

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{de classe } C^1$$
$$(r,\theta) \longmapsto (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$$

•) Soit $K = [0,R] \times [-\pi,\pi]$, $R > 0$

$\Psi(K) =$ disque D de centre $(0,0)$ et de rayon R

$D = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \}$

•) $\overset{\circ}{K} =]0,R[\times]-\pi,\pi[$

la restriction de Ψ à $\overset{\circ}{K}$ est injective, et pour tout $(r,\theta) \in \overset{\circ}{K}$

$$|\operatorname{Jac} \Psi(r,\theta)| = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r \neq 0 .$$

Conclusion :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\,dr\,d\theta$$

↳ disque D ↳ rectangle K

On peut remplacer $[-\pi,\pi]$ par $[0,2\pi]$

Remarque : bien que la restriction de Ψ à K ne soit pas injective, ~~part~~ et que le Jacobien de Ψ s'annule aux points de K tel que $r = 0$, cela n'empeche pas d'appliquer le théorème car les hypothèses concernant $\overset{\circ}{K}$ sont verifiées.

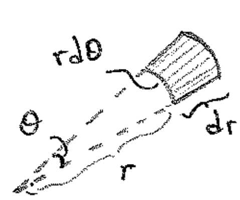
Remarque (à la "physicienne")

"$dA = r\,dr\,d\theta$" est le petit "élément d'aire" dans le plan (r,θ)

"$dx\,dy$" " " " " (x,y)

dA est l'element d'airé obtenu en faisant varier les variables x_i de $x_i \to x_i + dx_i$

plan (x,y)

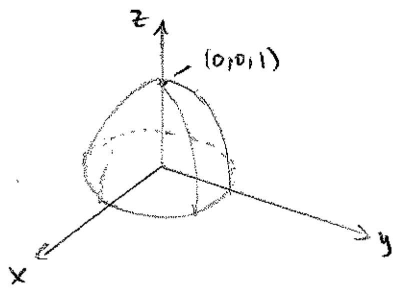


plan (r,θ)

EXO 1 : Déterminer le volume du solide délimité par le plan $z=0$ et le paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$

Réponse :

Le paraboloïde coupe le plan $z=0$ le long du cercle unité $x^2+y^2=1$



$$\text{Volume} = \iint_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

où D = disque de rayon 1

$$= \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$= \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

ou encore

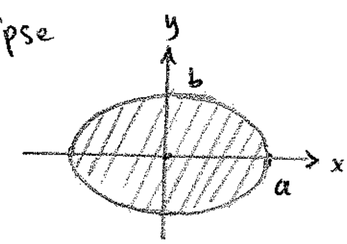
d'où

$$= \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

$$V = \iint_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^1 (r-r^3)\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

EXO 2 : Calculer l'aire à l'intérieur de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Réponse :

$$\text{Aire} = \iint_D dx\,dy \quad , \quad D = \text{intérieur ellipse}$$

Le domaine D peut-être paramétré par :

$$\Psi : [0,1] \times [0,2\pi] \longrightarrow D$$

$$(r,t) \longmapsto (ar\cos t\ ,\ br\sin t)$$

- Ψ est de classe C^1
- Ψ est injective sur $\mathring{K} =]0,1[\times]0,2\pi[$
- $|\operatorname{Jac}\Psi(r,t)| = abr \neq 0$ sur $\mathring{K}$

d'où

$$A = \iint_D dA = \int_0^1\int_0^{2\pi} abr.\,dr\,d\theta = ab \int_0^1\int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta = ab \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \boxed{\pi a b}$$