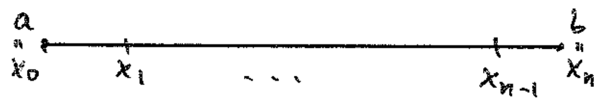
COURS 10 - M202

Rappel : Intégrales définie

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction

- Divisons $[a,b]$ en n-sous intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ tel que

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$



- choisissons $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \geq 1$ et considérons la somme

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Déf : On dit que f est intégrable sur $[a,b]$ si la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

existe. On écrit alors $\int_a^b f(x)\,dx$ cette limite.

Résultat : une fonction continue sur $[a,b]$ ou continue par morceaux est intégrable

Interprétation géométrique d'une intégrale : si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la region entre l'axe des x et la courbe représentative de f, pour $a \leq x \leq b$.

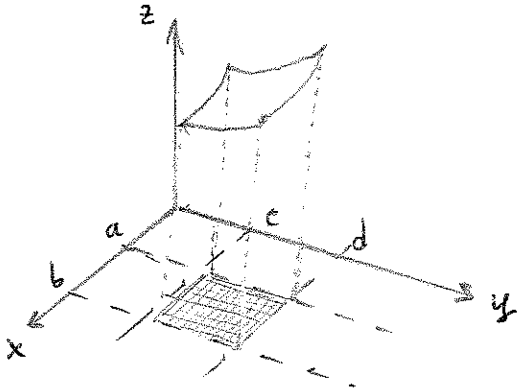
Nous allons étendre les constructions précédentes aux fonctions de deux variables.

Intégrales doubles (sur un pavé)

"Pavé" : $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$

$f : [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de 2-vars

Supposons pour l'instant $f \geq 0$ et que le graphe de f au dessus de R est la portion de surface représentée ci dessous et qui se projète sur R



Soit

S = solide entre graphe de f et R

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x,y) \ \forall (x,y) \in R\}$

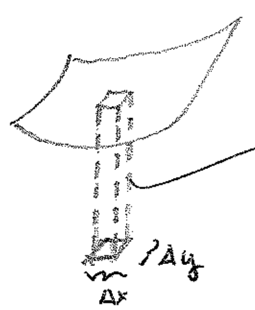
Comment calculer le volume V de S ?

On procède par étapes :

1) Divisons le pavé R en sous-rectangles : pour cela, on divise $[a,b]$ en m sous intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de longueur $\Delta x = \frac{b-a}{m}$, et on divise $[c,d]$ en n sous-intervalles $[y_{j-1}, y_j]$ de longueur $\Delta y = \frac{d-c}{n}$.

2) Les sous-rectangles $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ sont d'aire $\Delta x \Delta y = \Delta A$

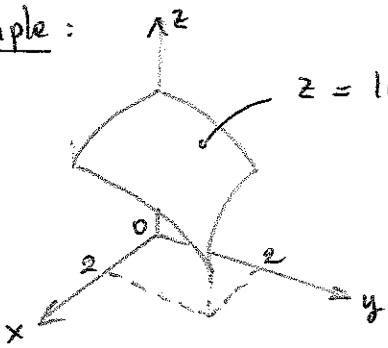
3) Si on choisit (x_{ij}^*, y_{ij}^*) un point arbitraire dans R_{ij}, alors pour n et m petits, la portion de S au dessus de R_{ij} n'est pas loin d'avoir le volume $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$



parallélépipède de volume $\approx f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$

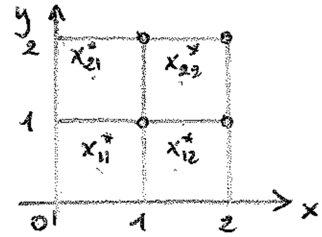
plus ΔA est petit, et plus cette approximation est fine

<u>Exemple</u> :



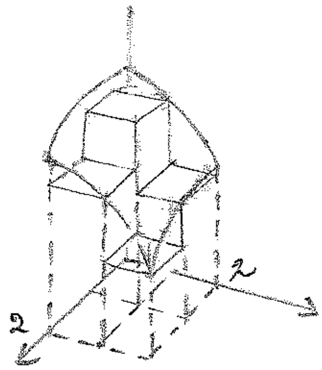
$z = 16 - x^2 - 2y^2$ sur $[0,2] \times [0,2] = R$

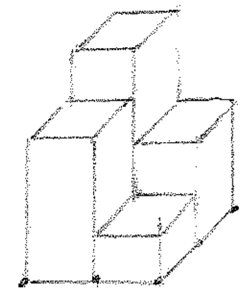
Divisons R en 4 sous-rectangles



Posons (x_{ij}, y_{ij}) le coin supérieur droit $\Rightarrow$ $x_{ij} = x_i$, $y_{ij} = y_j$

Construisons les parallélépipèdes au dessus de R_{ij}





$n = 2$
$m = 2$

Le volume V de ces parallélépipèdes est :

$$V = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$= f(1,1)\,\Delta A + f(1,2)\,\Delta A + f(2,1)\,\Delta A + f(2,2)\,\Delta A$$

$$= 13 \times 1 + 7 \times 1 + 10 \times 1 + 4 \times 1 = 34 \quad \text{(unité au cube)}.$$

$V = 34$ est une approximation du volume du solide entre R et le graphe. Une division plus fine de R en sous-rectangles donnerait une meilleure approximation (réponse : $V = 48$, voir Exo. p. 8).

<u>Déf:</u> f est intégrable sur le rectangle R si

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A \quad \text{existe}$$

On notera cette limite comme une intégrale "double"

$$\iint_R f(x,y)\, dA \qquad \text{ou} \qquad \iint_R f\, dA$$

<u>Remarque</u> : Si $f \geq 0$ sur R (c'est à dire $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in R$) alors le volume V du solide entre graphe de f et pavé R est :

$$V = \iint_R f(x,y)\, dA.$$

<u>Théorème</u> : Une fonction continue sur R est intégrable sur R

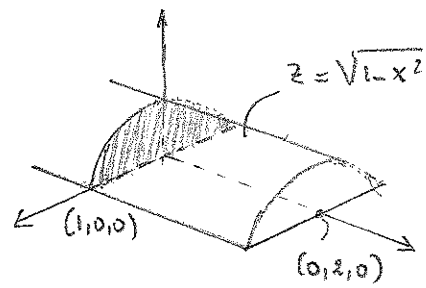
Ex : Calculez $\iint_R \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq 2\}$

Réponse :

Ecrire et calculer les sommes de Riemann est un procédé qui est long et fastidieux. Nous développerons plus tard des moyens de calcul pour éviter ceci. Pour cet exemple, il est beaucoup plus simple de calculer cette intégrale en l'interprétant comme un volume.

La figure représente le solide S entre le graphe de $z = \sqrt{1-x^2}$ et R

L'aire d'une section (partie hachurée) est $\frac{\pi}{2}$ (la moitié d'un disque de rayon 1)

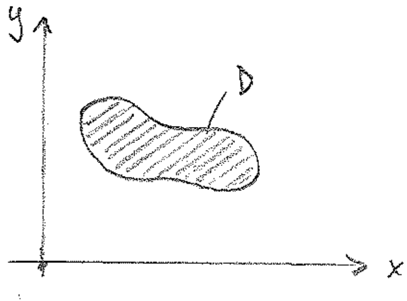


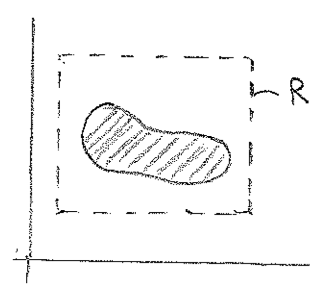
Et donc :

$$\iint_R \sqrt{1-x^2}\,dA = \frac{1}{2}\pi \cdot 4 = 2\pi .$$

Intégrales doubles sur des domaines généraux

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné (pas nécessairement un pavé)





Comme D est borné, on peut l'inclure (par définition) dans un pavé R. On définit alors une nouvelle fonction F sur R

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , (x,y) \in D \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

F peut ne pas être continue même si f est continue

Par contre si f est intégrable, alors F est intégrable

On définit $$\iint_D f\,dA = \iint_R F\,dA = \iint_R F(x,y)\,dx\,dy$$

Là aussi, si $f \geq 0$ sur D, alors $\iint_D f\,dA$ est le volume du solide entre graphe de f et la région D.

<u>Remarque :</u> Pour un f général, on peut poser $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$. Alors $f = f^+ - f^-$ et on peut écrire

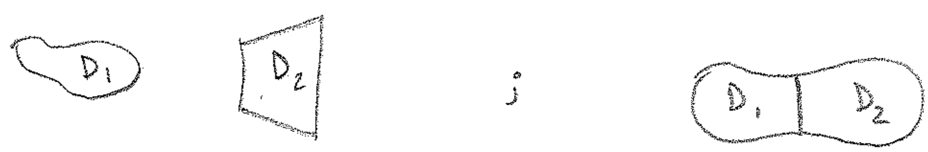
$$\iint_D f = \iint f^+ - \iint f^-$$

comme la différence de "deux volumes".

Nous avons les propriétés suivantes pour les intégrales doubles.

<u>Propriétés :</u>

1) Si $D = D_1 \cup D_2$ est un domaine borné, avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, ou bien D_1 et D_2 se coupent le long d'une frontière commune



Alors
$$\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

2) Linéarité :
$$\iint_D (af + bg) = a\iint_D f + b\iint_D g \quad , a,b \in \mathbb{R}$$

3) $$\boxed{\iint_D 1\,dA = \text{aire de } D =: A(D)}$$

4) Si $f \geq g$ sur D, alors $\iint_D f \geq \iint_D g$

5) Si $m \leq f(x,y) \leq M$ sur D, alors $m\,A(D) \leq \iint_D f \leq M\,A(D)$

Ex : Donner un encadrement pour l'intégrale

$$I = \iint_D e^{\sin x \cdot \cos y}\, dx\, dy$$

où D est le disque de centre O et de rayon 2.

Réponse :

$$\left.\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos y \leq 1 \end{array}\right. \Rightarrow -1 \leq \sin x \cdot \cos y \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{\sin x \cdot \cos y} \leq e$$

d'où

$$\iint_D e^{-1}\, dA \leq I \leq \iint_D e\, dA \Rightarrow \frac{4\pi}{e} \leq I \leq 4\pi$$

Intégrales Itérées

Nous donnons une façon constructive pour calculer les intégrale doubles sur un pavé.

Soit f définie sur $[a,b] \times [c,d] = R$.

La notation

$$\int_c^d f(x,y)\, dy$$ veut dire : x est maintenu fixe et $f(x,y)$ est intégrée par rapport à y, $c \leq y \leq d$.

Cette expression dépend de x en général et on obtient ainsi une nouvelle fonction de x qu'on peut intégrer sur $[a,b]$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx =: \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$$

[On appelle ceci une intégrale itérée]

De même, en fixant tout d'abord y et en faisant varier x, puis en faisant varier y, on obtient

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

Ex : Calculez les intégrales itérées

$$\int_0^3\int_1^2 x^2y\,dy\,dx \quad \text{et} \quad \int_1^2\int_0^3 x^2y\,dx\,dy$$

Réponse :

•) $\displaystyle\int_1^2 x^2y\,dy = \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} = x^2.2 - x^2.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}x^2$

$$\Rightarrow \int_0^3\int_1^2 x^2y\,dy\,dx = \int_0^3\left(\frac{3}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{27}{2}.$$

•) $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 x^2y\,dx\,dy = \int_1^2\left[\frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=3} dy = \int_1^2 9y\,dy = 9.\frac{y^2}{2}\Big]_{y=1}^{2}$

$$= \frac{27}{2}$$

On remarque que les deux intégrales sont les mêmes.

Ceci n'est pas une coincidence.

Théorème de Fubini :

Si f est continue sur le pavé $R = [a,b]\times[c,d]$, alors

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f\,dx\,dy$$

Preuve :

Il faut donc montrer que l'intégrale ne dépend pas de l'ordre d'itération. Voici les étapes clés.

•) Considérons les applications

$$g : [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,y) \longmapsto \int_a^t f(x,y)\,dx$$

$$G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \int_c^d\left(\int_a^t f(x,y)\,dx\right)dy = \int_c^d g(t,y)\,dy$$

•) g est continue par rapport à t (en tant que primitive d'une fonction continue).

•) A y fixé, la fonction $t \longmapsto g(t,y)$ est dérivable sur $[a,b]$
$\Rightarrow$ elle admet une dérivée partielle par rapport à t sur $[a,b]\times[c,d]$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,y) = f(t,y)$$

•) G est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $G'(t) = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial t}(t,y)\,dy = \int_c^d f(t,y)\,dy$

•) On écrit donc que

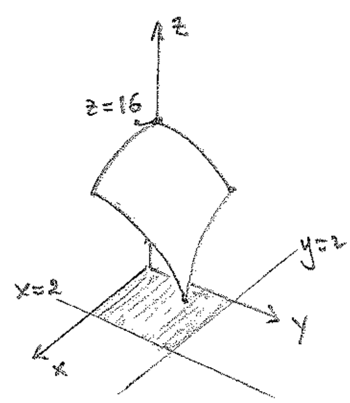
$$G(b) - G(a) = G(b) = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

d'autre part

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x)\,dx = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Exo : Calculez le volume du solide délimité par le paraboloïde $x^2+2y^2+z=16$, les plans $x=2$ et $y=2$, et les plans de coordonnées.

Réponse :



$$V = \iint_{[0,2]\times[0,2]} z\,dA$$

$$= \int_0^2\int_0^2 (16-x^2-2y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right)dy = 48$$

Cas Spécial :

si $f(x,y) = g(x).h(y)$, alors $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$

Exo : $\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi/2]} \sin x.\cos y\,dA = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx . \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy = 1\times 1 = 1.$