Exercices, Feuille IV - Math 202 PC, 2010-2011

Matrice jacobienne. C^1-difféomorphismes. Equations Dérivées Partielles

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2z)$.

a. Ecrire la matrice jacobienne de f au point (x, y, z).

b. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $g(u, v) = (u^2 + v, uv, e^v)$. Ecrire la matrice jacobienne de g au point (u, v).

c. Ecrire la matrice jacobienne de $g \circ f$ au point (x, y, z).

Exercice 2
Considérons la fonction f définie sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ par $f(x, y) = \left(\dfrac{x^2}{2y}, \dfrac{y^2}{2x}\right)$

a. Montrer que f est différentiable sur E.

b. Ecrire la matrice jacobienne de f sur E.

c. Montrer que f est une bijection de E sur E.

d. On pose $g = f^{-1}$. Déterminer g et vérifier que g est différentiable sur E.

e. Ecrire la matrice jacobienne de g sur E.

Exercice 3
Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x, y) = (x + y, x + my)$, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

a. A quelle condition la matrice jacobienne de ϕ est-elle injective ?

b. A quelle condition ϕ est-il un changement de variables ou C^1-difféomorphisme ?

Exercice 4
Trouver un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ tel que l'application $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, xy)$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $\phi(U)$.

Exercice 5 (Coordonnées Polaires)
Pour $(r, \theta) \in U =]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$, on pose $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. On rappelle que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe un unique $\theta \in [-\pi, \pi[$ tel que $\alpha = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$.

a. Montrer que Φ est un C^1-diffeomorphisme de U sur

$$U' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ ou } (y = 0 \text{ et } x > 0)\}$$

b. Déterminer la jacobienne de Φ^{-1} en $(x, y) \in U'$.

c. On note $U'_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+, U'_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$ et $U'_3 = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$. Donner l'expression explicite de Φ^{-1} sur chacun de ces U'_i.

d.. Retrouver à partir des formules précédentes la matrices jacobienne de Φ^{-1} sur U'.

Equations aux Dérivées Partielles du premier ordre

Exercice 1. Résoudre les EDP d'inconnue $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert indiqué U et à l'aide du changement de variable fourni (u, v) :

a. $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 y\,;$ $\qquad U = \mathbb{R}^2 \qquad (u = x, v = x + 2y)$

b. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = xy^2\,;$ $\qquad U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \qquad (u = x, v = xy)$

c. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4 + y^4}\,;$ $\qquad U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \qquad (u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2)$

Exercice 2. On considère l'EDP (E) : $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

a. Résoudre (E) à l'aide du changement de variable $(u = x, v = \frac{y}{x})$.

b. Résoudre (E) en passant en coordonnées polaires.

Exercice 3. Soit a un réel fixé. Résoudre l'EDP (E) : $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = a.f$ sur $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ en passant en coordonnées polaires.

Exercice 4. Soit $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ définie par : $\phi(x, y) = (xy, \frac{y}{x})$.

a. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur U.

b. A $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ on associe $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ définie par $f(x, y) = g(xy, \frac{y}{x})$ pour tout $(x, y) \in U$. Donner une CNS sur g pour que f soit une solution de l'équation $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy \quad (E)$.

c. Déduire de b. les solutions de (E) sur U.

Exercice 5. Soit $U_1 = \{(x, y) \in R^2 : y > x\}$ et $\phi : U_1 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $\phi(x, y) = (xy, x + y)$.
1. a. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U_1 sur$\phi(U_1)$ que l'on déterminera.

b. A $f \in C^1(U_1, \mathbb{R})$ on associe $g \in C^1(U_1, \mathbb{R})$ définie par $f(x, y) = g(xy, x + y)$ pour tout $(x, y) \in U_1$. Donner une CNS sur g pour que f soit une solution de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y - x)f \qquad (E)$$

c. Déduire de b. les solutions de (E) sur U.

2. Sans refaire les calculs, donner les solutions de (E) sur $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$.
3. En étudiant les " raccords" sur la droite d'équation $x = y$ d'une solution de (E) sur U_1 et d'une solution de (E) sur U_2, trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^2$.