Feuille I –Fonctions de plusieurs variables : généralités, limites, continuité

1.1) Généralités. Fonctions de plusieurs variables, domaine de définition, image. Graphe, traces et courbes de niveau.

1.2) Limite d'une application en un point. Limite d'une application en un point, unicité. Propriétés (opérations, gendarmes, composition). Limites suivant un chemin. Fonctions usuelles et exemples de calcul.

1.3) Continuité . Définition et exemples. Propriétés (opérations, composition de fonctions continues, fonctions usuelles).

Exercice 1

Déterminer et représenter les domaines de définition pour chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$. **b.** $f(x,y) = \sqrt{2x+y^2}$. **c.** $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

d. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$. **e.** $f(x,y) = \arcsin(x+y)$. **f.** $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

g. $f(x,y) = \sqrt{x\sin y} + \ln(x+5y)$. **h.** $f(x,y) = \ln(1-xy)$. **i.** $f(x,y) = \ln(x+y^2)$

j. $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$. **k.** $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x+y+|z|}$.

Exercice 2

Dessiner (à l'aide des traces) les graphes des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \cos x$. Décrire précisément les intersections avec les plans d'équation $\{y = k\}$.

2. $f(x,y) = 4x^2 + y^2$.

3. $f(x,y) = -xy$. Indiquer les courbes de niveau correspondant respectivement à $\{z = 1\}$ et $\{z = -1\}$.

4. $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble image des fonctions suivantes :

a. $f(x,y) = \cos x$ **b.** $f(x,y) = \ln(2x-y+1)$. **c.** $f(x,y) = y^2e^{xy}$. **d.** $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Exercice 4

Déterminer si les fonctions suivantes ont une limite en $(x,y) = (0,0)$ et donner leurs valeurs si elles existent.

a. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. **b.** $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}$. **c.** $\dfrac{xy+y^2}{x^2+4xy+y^2}$.

d. $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$. **e.** $\dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$. **f.** $\dfrac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}$.

g. $e^{\left(\frac{-|x-y|}{x^2-2xy+y^2}\right)}$ **h.** $\dfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$ **i.** $|x|^y$. **j.** $|x|^{1/y}$.

k. $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$. **l.** $\dfrac{xy}{x+y}$. **m.** $\dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$. **n.** $\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

o. $\dfrac{\sin x - \sin y}{\mathrm{sh}x - \mathrm{sh}y}$. **p.** $\dfrac{\sin x}{\cos y - \mathrm{ch}x}$. **q.** $\dfrac{\sin x - y}{x - \sin y}$. **r.** $\dfrac{\sin x^4 + (1-\cos y)^2}{4x^4+y^4}$.

s. $\dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$. **t.** $\dfrac{\mathrm{ch}(xy)-\cos(xy)}{x^2y^2}$. **u.** $\dfrac{\sin x - y}{x - \sin y}$. **v.** $\dfrac{\sin x^4 + \sin y^4}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

x^2+y^2 x^2+y^2 $|x|+|y|$ $x^2+|y|$

Exercice 5

Etudier la continuité des fonctions suivantes.

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ x & \text{si } y = 0 \end{cases}$

c. $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{|y|}} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

d. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

Exercice 6

a. Vérifier que la fonction définie pour $(x,y) \neq (0,0)$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ possède la propriété suivante : *les limites itérées* $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ *et* $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ *existent et sont égales mais f n'a pas de limite en* $(0,0)$.

b. Vérifier que la fonction définie pour $xy \neq 0$ par $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ possède la propriété suivante : *aucune des limites itérées* $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ *et* $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ *n'existe mais f a bien la limite nulle en* $(0,0)$.