Examen du 7 janvier 2009– Durée : 3h

*D*ocuments, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3 + xy - y^3}{|x| + 2|y|} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Calculer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$
(c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
(d) La fonction f est-elle de classe C^1 dans un voisinage de $(0,0)$? Justifier votre réponse.

Exercice II. Soit $V = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \to V$ définie par $\phi(x,y) = (xe^y, e^y)$.

1. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme et déterminer son application réciproque $\phi^{-1}(u,v)$.
2. On cherche les solutions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = -xe^y.$$

3. On pose $f(x,y) = g(u,v) = g(xe^y, e^y)$ avec $(u,v) = (xe^y, e^y)$.
   (a) Trouver l'équation aux dérivées partielles (2) que vérifie g.
   (b) Résoudre l'équation (2) pour g et en déduire les solutions f de l'équation (1) .

Exercice III.

1. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $I_1 = \iint_D (x-y)^2$, où $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \ ; \ 0 \leq y \leq x \ \}$, on dessinera la région D puis on utilisera les *coordonnées polaires*.
   (b) $I_2 = \iint_\diamond (2x - y)$, où $\diamond$ est le losange de sommets : $A = (0,0)$, $B = (1,2)$, $C = (2,0)$ et $E = (1,-2)$,
      i. directement en utilisant le théorème de Fubini,
      ii. à l'aide du changement de variables $(x = \frac{u+v}{4}, y = \frac{-u+v}{2})$.
2. Calculer l'aire de la partie plane $\Delta := \{\ (x,y) : x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ xy \geq 1 \ \text{ et } \ y \leq -x + 4 \ \}$.

Exercice IV.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -x^2y - xy^2 + 3xy$.
   (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
2. Soient a, b et c trois réels strictement positifs et $OABC$ le tétrahèdre de l'espace $\mathbb{R}^3$ de sommets : $O = (0,0,0)$, $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$ et $C = (0,0,c)$.
   On rappelle la formule du volume de ce tétrahèdre : $Vol(OABC) = \frac{abc}{6}$.
   (a) En interprétant le tétrahèdre $OIJK$ comme le volume du solide délimité par les plans coordonnées et le plan $x + y + z = 1$, retrouver à l'aide d'une intégrale double : $Vol(OIJK) = \frac{1}{6}$, où $I = (1,0,0)$, $J = (0,1,0)$ et $K = (0,0,1)$.
   (b) On suppose que les nombres a, b et c vérifient $a + b + c = 3$, calculer le volume $V(a,b)$ du tétrahèdre $OABC$ correspondant.
   (c) Pour quelles valeurs de a et b ce volume est maximal et que vaut-il ?