DS, le 17 novembre 2007 à 10h15, **Durée : 2h**
Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I. (Question de cours)

(a) Donner la définition de la différentiabilité en $(0,0)$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice II. Etudier les limites des fonctions suivantes en $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

(b) $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$;

(c) $h(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

Exercice III. Soit n un entier strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = y^n \cos(\ln(x^2+y^2)) \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier l'existence et eventuellement calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$. (On distinguera le cas où $n = 1$ et $n \geq 2$.)
4. Trouver les valeurs de n pour lesquelles la fonction f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$. Justifier.
5. On suppose que $n = 3$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.
6. On suppose que $n = 1$. Donner l'équation du plan tangent de la surface $z = f(x,y)$ en $(0,1)$.

Exercice IV. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ tel que $(u,v) = \phi(x,y) = (x-y, xy)$ soit un C^1-difféomorphisme (ou changement de variables) de U sur V. Soit $f(x,y) = g(u,v)$ où g est une application de V dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$.