UFR de Mathématiques USTL
M202 - Calcul Différentiel

Licence I
2010-2011

DEVOIR SURVEILLÉ no.2 du 10/01/2011

2H00 - DOCUMENTS ET CALCULATRICES NON AUTORISÉS

Cette épreuve consiste en 4 exercices indépendants. Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des réponses.

Exercice I.
Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. On considère l'application $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

(1) Montrer que ϕ est un C^1-diffeomorphisme de U sur U, et écrire la fonction inverse.
(2) On considère l'EDP

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

Résoudre cette EDP sur U à l'aide du changement de variable ϕ.

Exercice II. (Représenter graphiquement les domaines d'intégration).
(1) Déterminer l'aire de la région du premier quadrant délimitée par l'hyperbole $xy = 4$ et les droites $y = x$, $y = 0$ et $x = 4$.

(2) Calculer le volume du solide entre le plan $z = x$ et le triangle de sommets $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(1, 3)$.

Exercice III. (Représenter graphiquement les domaines d'intégration).
(1) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy$ après avoir interverti l'ordre des variables.

(2) Calculer l'intégrale itérée en passant aux coordonnées polaires

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dydx$$

Exercice IV.
Soit U le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $x \geq 0$, entre les quatre paraboles

$$y = x^2 \quad , \quad y = -x^2 \quad , \quad y = x^2 - 2 \quad \text{et} \quad y = 1 - x^2$$

(1) Représenter graphiquement la région U.

(2) Soit $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (u, v)$ avec

$$u = x^2 - y \quad , \quad v = x^2 + y$$

Verifier que l'image de U par ϕ est le pavé $R = [0, 2] \times [0, 1]$.
Montrer ensuite que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $i(U)$ dans $i(R)$. Par $i(U)$ on signifie

DS2 – M202 – CORRIGÉ

EXO I :

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x>0, y>0\}$.

$\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \longmapsto (xy, \frac{y}{x})$

a) Montrer que ϕ est un C^1-difféo. de U sur U

b) Résoudre EDP : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$ à l'aide de ϕ.

Réponse :

1) ϕ est C^1 car chacune de ses composantes est C^1.

Il est clair que $\phi(U) \subset U$. Montrons que :

$\forall (u,v) \in U, \ \exists! (x,y) \in U$ tel que $\phi(x,y) = (u,v)$

$$\phi(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

On voit donc que pour tout $(u,v) \in U$, $u>0, v>0$, il existe $(x,y) \in U$ tel que $\phi(x,y) = (u,v)$, en l'occurrence

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{uv}$$

Ceci montre la surjectivité, le couple (x,y) est unique (car il s'exprime d'une manière unique en terme de (u,v)). Ceci montre que ϕ est également injective.

$\Rightarrow \phi$ bijective.

de fonction inverse

$$\phi^{-1} : U \longrightarrow U, \quad (u,v) \longmapsto \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$$

2) $$\mathrm{Jac}_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathrm{Jac}_\phi(x,y) = 2\,y/x > 0$$

D'après le théorème d'inversion locale, ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image $\mathcal{U}$.

3) Posons $F = f \circ \phi^{-1}$ ou $f = F \circ \phi$

c'est à dire $f(x,y) = F\left(xy\,;\,\frac{y}{x}\right) = F(u,v)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}$$

Réécrivons l'EDP (E) en terme de F, u et v

$$(E) : \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

$$\Leftrightarrow \left(xy\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x}\frac{\partial F}{\partial v}\right) + xy\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{y}{x}\frac{\partial F}{\partial v} = 2xy$$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy\frac{\partial F}{\partial u} = 2xy$$

$$(E') \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 1$$

f est solution de (E) sur $\mathcal{U}$ $\Leftrightarrow$ F est solution de (E') sur $\mathcal{U}$

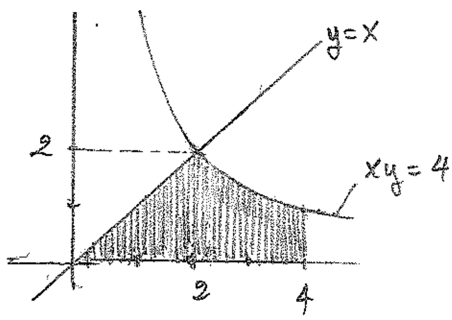
4) $\frac{\partial F}{\partial u} = 1 \quad \Rightarrow \quad F(u,v) = u + h(v)$ avec $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = xy + h\left(\frac{y}{x}\right), \ h \text{ de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[.$$

EXO II.

1) Determiner aire de la région du premier quadrant delimitée par hyperbole $xy = 4$ et les droites $y = x$, $y = 0$ et $x = 4$

Réponse :



La région R en question se décompose en deux parties élémentaires :

$R_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\}$

$R_2 = \{(x,y) \mid 2 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq \frac{4}{x}\}$

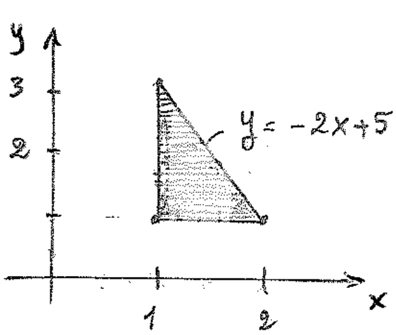
$$\text{Aire de } R = \iint_R dA = \int_0^2 \int_0^x dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{\frac{4}{x}} dy\,dx$$

$$= \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 \frac{4}{x}\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left.4\ln x\right]_2^4$$

$$= 2 + 4\ln 2$$

2) Calculer le volume du solide entre le plan $z = x$ et le triangle de sommets $(1,1)$, $(2,1)$ et $(1,3)$

Réponse :



$$V = \iint_R \ dx\,dy \quad , \ R = \text{triangle plein}$$

$$R = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq -2x+5\}$$

$$V = \int_1^2 \int_1^{-2x+5} x \ dy\,dx = \int_1^2 (-2x^2+5x-1)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= \frac{67}{6}$$

Exo III.

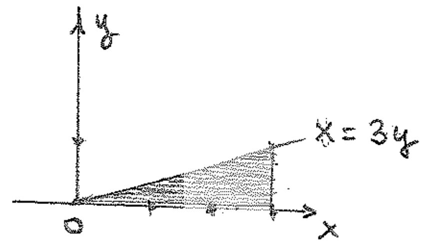
1) Calculer l'integrale après avoir interverti ordre des variables

$$I = \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$$

Réponse :

R = domaine d'intégration (triangle)

$R = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1 \ , \ 3y \leq x \leq 3\}$



qu'on peut réécrire

$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 3 \ , \ 0 \leq y \leq \frac{x}{3}\}$

ce qui donne

$$I = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{x}{3} e^{x^2}\,dx = \left[\frac{e^{x^2}}{6}\right]_0^3 = \frac{1}{6}(e^9 - 1)$$

2) Calculer l'intégrale itérée en passant aux coordonnées polaires

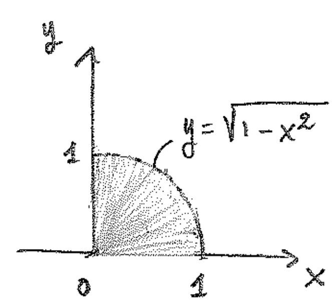
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

Réponse :

R = domaine d'intégration

$= \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

= Quart du disque unité se trouvant dans le premier quadrant



d'où

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 e^{r^2} \cdot r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} e^{r^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left[e - 1\right]$$

Exo IV : Soit $\mathcal{U}$ domaine de $\mathbb{R}^2$ avec $x \geq 0$ et entre les paraboles

$$y = x^2 \ , \ y = -x^2 \ , \ y = x^2 - 2 \ \text{ et } \ y = 1 - x^2$$

1) Représenter $\mathcal{U}$

2) Soit $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2 , \ (x,y) \longmapsto (u,v) \ : \ u = x^2 - y \ , \ v = x^2 + y$

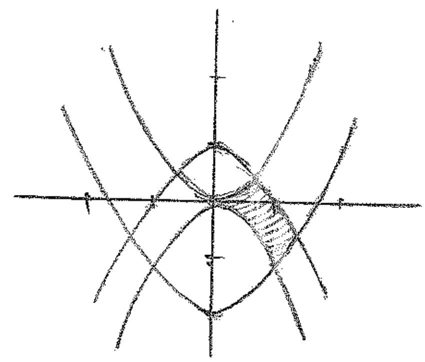
Verifiez que $\phi(\mathcal{U}) = R = [0,2] \times [0,1]$ et que ϕ est un C^1-difféo de $\mathring{\mathcal{U}}$ sur $\mathring{R}$.

3) Utiliser changement de vars ϕ pour calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{U}} x(x^4 - y^2)\,dx\,dy$

Réponse :

•) La région est définie par :

$$y \leq x^2 , \quad y \geq -x^2$$
$$y \geq x^2 - 2 , \quad y \leq 1 - x^2$$



ceci donne :

$$0 \leq x^2 - y \qquad x^2 + y \geq 0$$
$$2 \geq x^2 - y \qquad x^2 + y \leq 1$$

Ce qui donne $\quad 0 \leq u \leq 2 \quad$ et $\quad 0 \leq v \leq 1$

•) Bijection : $\phi(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} u = x^2 - y \\ v = x^2 + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u+v}{2}} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$

•) $$Jac_\phi(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 2x & +1 \end{bmatrix}$$

$\det Jac_\phi(x,y) = 4x > 0$ sur $\mathring{\mathcal{U}}$

d'où ϕ est un C^1-difféo de $\mathring{\mathcal{U}}$ sur $\phi(\mathring{\mathcal{U}}) = \mathring{R}$.

•) $$\iint_{\mathcal{U}} x(x^4 - y^2)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{U}} (x^2 - y)(x^2 + y) \cdot x\,dx\,dy = \iint_R u \cdot v \cdot \frac{1}{4}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \int_0^1 uv\,du\,dv = \ldots = \frac{1}{4}$$