DS, le 15 novembre 2008 à 8h, **Durée : 2h**

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I.
(a) Donner la définition de la différentiabilité en $(0,0)$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
(b) Déterminer puis dessiner la ligne de niveau 1 de la fonction $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x + 1$.

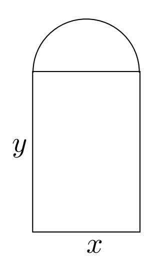
Exercice II. Etudier les limites des fonctions suivantes au point A
(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ en $A = (0,0)$;
(b) $g(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2)}{xy^3}$ en $A = (1,0)$;
(c) $h(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ en $A = (0,0)$;

Exercice III. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = y^n \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0); \quad \text{et } f(0,0) = 0,$$

où n est un entier strictement positif.
(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.
(c) Pour quelles valeurs de n la fonction f est-elle de classe C^1 dans un voisinage de $(0,0)$? Justifier vos réponses.
(d) On suppose que $n = 3$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$.
(e) On suppose que $n = 1$. Donner l'équation du plan tangent de la surface définie par $z = f(x,y)$ au point $(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}})$.

Exercice IV. La partie vitrée d'une fenêtre est consituée d'un rectangle vertical de largeur x et de longueur y surmonté d'un demi-disque de diamètre x.



(a) Exprimer l'aire $A(x,y)$ de cette vitre en fonction de x et y.
(b) Calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial A}{\partial x}$ et $\frac{\partial A}{\partial y}$ de A.
(c) Encadrer l'erreur avec laquelle sera calculée l'aire de la vitre, sachant que la mesure de x est 2m, celle de y est 3m et que l'appareil de mesure de ces longueurs a une précision de 1% (autrement dit x et y sont connus à 1% près).