UFR de Mathématiques USTL | Licence I
M202 - Calcul Différentiel | 2010-2011

DEVOIR SURVEILLÉ M202 du 06/11/2010

2H00 - DOCUMENTS ET CALCULATRICES NON AUTORISÉS

Exercice I.
La loi des gaz relative à une masse fixée m d'un gaz parfait à température absolue T, pression P et volume V s'écrit $PV = mRT$, ou R est la constante du gaz. Montrez que le produit $\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P}$ est constant.

Exercice II.
On considère la fonction
$$f(x, y) = \ln(x - y^2)$$
(1) Représenter graphiquement le domaine de définition de f.
(2) Dessiner quelques courbes de niveau de la fonction f.
(3) Ecrire l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1, 0, 0)$.

Exercice III.
Considérons
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \cos y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (0, 0) \end{cases}$$
(1) Calculer les dérivées premières partielles de f au point $(0, 0)$.
(2) La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice IV.
On considère la fonction
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} & , \ xy > 0 \\ 0 & , \ xy \leq 0 \end{cases}$$
(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Calculer les dérivées premières partielles de f au point $(0, 0)$.
(3) f admet-elle des dérivées premières partielles au point $(1, 0)$?
(4) f admet-elle une dérivée directionnelle en $(0, 0)$ dans la direction de $\vec{u} = (1, 1)$?
(5) f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice V.
Soit $P_0 = (1, 0, -2) \in \mathbb{R}^3$. La distance de P_0 au plan
$$\mathcal{P} : \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 4\}$$
est le minimum des distances $|PP_0|$, $P \in \mathcal{P}$. Calculer cette distance en minimisant une certaine fonction (aucune autre méthode ne sera acceptée).