Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2009–2010**

Fiche n° 1

Ex 1. Covariances d'une loi multinomiale
On considère $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur de loi multinomiale $\mathrm{Mult}(n, p_1, \dots, p_d)$ où n est un entier et $p_1, \dots, p_d$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{d} p_i = 1$.

1) Rappeler la définition de la loi multinomiale. Donner un exemple de modélisation conduisant à une loi multinomiale.

2) Expliquer sans calcul pourquoi $\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_d) = 0$.

3) Quelle est la loi de X_i pour $1 \leq i \leq d$? Que vaut sa variance ?

4) Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

5) En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

6) Contrôler ce résultat en développant $\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_d)$ et en utilisant la première question.

Ex 2. Somme d'une v.a. discrète et d'une v.a. à densité
On définit sur le même espace de probabilité une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ et une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = N + U$.

1) Montrer que la fonction de répartition de X est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose de plus que N et U sont indépendantes. Montrer que la fonction de répartition de X est affine par morceaux.

Ex 3. Somme de deux v.a. de loi uniforme
Soit X et Y deux variables aléatoires positives telles que le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 2]$. On se propose de calculer de plusieurs manières l'espérance de la variable aléatoire positive $Z := X + Y$.

• Première méthode : calcul de la fonction de répartition de Z.

1) Calculer la fonction de répartition H de Z. *Indication :* on se servira de la loi du couple (X, Y) pour ramener le calcul de $P(X + Y \leq t)$ à un calcul d'aire (pour tout réel t positif fixé).

2) Tracer le graphe de H.

3) Calculer l'espérance de Z à l'aide de la fonction de répartition H et la représenter sur le graphe de H.

• Deuxième méthode : calcul de la densité de Z.

On pourra utiliser dans la suite le fait que X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, Y une loi uniforme sur $[0, 2]$ et que X et Y sont indépendantes (sans le redémontrer).

4) Quelles sont les densités respectives f et g de X et Y ?

5) On sait, d'après le cours, que Z est une variable à densité. En calculant un *produit de convolution*, donner la densité h de Z.

6) Contrôler le résultat précédent à l'aide du résultat de la question 1.

7) Calculer l'espérance de Z en utilisant la densité h.

• Troisième méthode.

8) Proposer une autre méthode pour calculer l'espérance de Z (sans avoir à calculer la loi de Z).

Ex 4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(2x+y)\mathbf{1}_{[0,1]\times[0,2]}(x,y).$$

1) Calculer $P(X \in [0,1])$, $P(X \leq \frac{1}{2})$, $P(Y \leq 1)$, $P\left(\{X \leq \frac{1}{2}\} \cap \{Y \leq 1\}\right)$ et $P(X+Y \leq 1)$.

2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3) Quelles sont les lois marginales de X et de Y ?

4) Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

Ex 5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi normale centrée réduite et $P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}$.

1) Quelle est la loi de $Z = XY$?

2) Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

3) Soit $U = X + Z$. Quelle est la loi de U ?

Ex 6. Soit L une variable aléatoire positive admettant une densité de probabilité f et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de L. On définit deux variables aléatoires L_1 et L_2 par $L_1 = XL$ et $L_2 = (1-X)L$ (cela représente par exemple la rupture aléatoire en deux morceaux de longueur L_1 et L_2, d'une certaine molécule de longueur aléatoire L).

1) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) ainsi que les lois de L_1 et L_2.

2) Que peut-on dire du couple (L_1, L_2) lorsque $f(y) = \alpha^2 y e^{-\alpha y}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y)$ $(\alpha > 0)$?

3) Déterminer la loi de $Z = \min\{L_1, L_2\}$.

Ex 7. Loi Gamma et loi du Khi-deux
Soit $a > 0$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et on note $\Gamma(a)$ cette intégrale.

1) Quelle est la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier n ?

2) Pour $b > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-bt}\,dt$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut-elle (en fonction de la fonction Γ) ?

3) En déduire que $f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Si une variable aléatoire X a pour densité $f_{a,b}$, on dit que X suit la loi Gamma(a,b).

4) Soit U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes, de densités respectives $f_{a,b}$ et $f_{c,b}$. Déterminer la loi de $U+V$. Ce résultat peut être utile. En particulier, il permet d'obtenir la densité de la loi d'une somme de deux variables aléatoires de loi exponentielle (pourquoi ?). Une autre application est la suivante.
Soit maintenant n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, de même loi normale centrée réduite ($n > 1$).

5) Déterminer une densité de X_i^2, pour $i \in \{1, \dots, n\}$. En déduire $\Gamma(1/2)$.

6) Déterminer une densité de $Z_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2$. La loi de Z_n s'appelle loi du khi-deux à n degrés de liberté, et est notée $\chi^2(n)$.

7) Que vaut $\mathbf{E}(Z_n)$?