Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Fiche n° 5

Ex 1. L'angoisse du gardien de but.

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes avec pour chaque épreuve trois issues possibles : *succès* avec probabilité p, *échec* avec probabilité q ou *nul* avec probabilité r $(p + q + r = 1)$. On note respectivement S_i, E_i et N_i les événements *succès*, *échec*, *nul* à la i-ème épreuve,et on définit les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 égales respectivement au nombre de *succès*, *échec*, *nul* lors des n épreuves. *échec*, *nul* à la i-ème épreuve

1) Dans cette question, $n = 5$. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre 2 succès suivis d'un échec et de 2 nuls ? Quelle est celle d'obtenir (sans condition d'ordre) 2 succès, 1 échec et 2 nuls ?

2) Généraliser en montrant que la probabilité d'obtenir au cours des n épreuves (et sans condition d'ordre) i succès, j échecs et k nuls $(i + j + k = n)$ vaut :

$$\frac{n!}{i!\,j!\,k!}p^i q^j r^k.$$

Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité qui est celle du vecteur aléatoire (X_1, X_2, X_3).

3) Quelle est la loi des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 ? Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4) On revient au cas $n = 5$ et on définit la variable aléatoire $Z = X_1 - X_2$. Calculer $P(Z = 0)$.

5) *Application* : Un match de coupe entre deux équipes de football s'étant terminé sur un score nul, l'équipe qualifiée est désignée par la séance des penaltys. Un joueur de l'équipe A tire un penalty face au gardien de l'équipe B, puis un joueur de l'équipe B tire un penalty face à celui de l'équipe A et ainsi de suite jusqu'à ce que chaque équipe ait tiré 5 penaltys. On admet que la probabilité de réussir un penalty est dans chaque cas de 0,7 et que tous les tirs sont indépendants. Calculer la probabilité que les deux équipes soient encore à égalité après avoir tiré chacune ses 5 penaltys. Calculer la probabilité de qualification de A au bout de ses 5 penaltys.

Ex 2. Covariances d'une loi multinomiale

On considère $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur de loi multinomiale $\mathrm{Mult}(n, p_1, \dots, p_d)$ où n est un entier et $p_1, \dots, p_d$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^d p_i = 1$

1) Expliquer sans calcul pourquoi $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_d) = 0$.

2) Quelle est la loi de X_i pour $1 \leq i \leq d$? Que vaut sa variance ?

3) Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

4) En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

5) Contrôler ce résultat en développant $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_d)$ et en utilisant la première question.

Ex 3. Loi uniforme sur un borélien de $\mathbb{R}^2$
Soit A un borélien de $\mathbb{R}^2$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur A. Dans chacun des cas suivants, donner les lois de X et Y, et étudier leur indépendance.

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ,\ 1 \leq y \leq 2x \text{ et } y \leq 6 - x\}$,

2) $A = \big\{(x, y) \in [0, 1]^2 ,\ x \geq y + \frac{1}{2} \text{ ou } x \leq y \leq x + \frac{1}{2}\big\}$,

3) A est le disque unité.

Ex 4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(2x + y)\mathbf{1}_{[0,1]\times[0,2]}(x, y).$$

1) Calculer $P(X \in [0, 1])$, $P(X \leq \frac{1}{2})$, $P(Y \leq 1)$, $P\big(\{X \leq \frac{1}{2}\} \cap \{Y \leq 1\}\big)$ et $P(X + Y \leq 1)$.

2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3) Quelles sont les lois marginales de X et de Y ?

4) Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

Ex 5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres α. Déterminer les lois de $-Y$, $X + Y$ et $X - Y$.

Ex 6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi normale centrée réduite et $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

1) Quelle est la loi de $Z = XY$?

2) Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

3) Soit $U = X + Z$. Quelle est la loi de U ?

Ex 7. Fonction Gamma
Soit $a > 0$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et on note $\Gamma(a)$ cette intégrale.

1) Pour $b > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-bt}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut-elle ?

2) En déduire que $f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

3) Soit U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes, de densités respectives $f_{a,b}$ et $f_{c,b}$. Déterminer la loi de $U + V$.
Soit maintenant $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes, de même loi normale centrée réduite $(n > 1)$.

4) Déterminer une densité de X_i^2, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. En déduire $\Gamma(1/2)$.

5) Déterminer une densité de $Z_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2$. La loi de Z_n s'appelle loi du khi-deux à n degrés de liberté, et est notée $\chi^2(n)$.

6) Que vaut $\mathbf{E}(Z_n)$?

Ex 8. Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ admettant la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{\pi} \exp\left(-(x_1^2 - 6x_1x_2 + 25x_2^2)\right).$$

1) Quelles sont les densités marginales de (X_1, X_2) ? Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

2) Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. On définit un nouveau vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ par $(Y_1, Y_2) := (aX_1 + bX_2, X_2)$. Ce vecteur admet-il une densité, et si oui, laquelle ?

Entraînement supplémentaire :

Ex 9. Somme d'une v.a. discrète et d'une v.a. à densité

1) On définit sur le même espace de probabilité une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ et une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = N + U$. Montrer que la fonction de répartition de X est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose de plus que N et U sont indépendantes. Montrer que la fonction de répartition de X est affine par morceaux.

Ex 10. Soit L une variable aléatoire positive admettant une densité de probabilité f et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de L. On définit deux variables aléatoires L_1 et L_2 par $L_1 = XL$ et $L_2 = (1 - X)L$ (cela représente par exemple la rupture aléatoire en deux morceaux de longueur L_1 et L_2, d'une certaine molécule de longueur aléatoire L).

1) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) ainsi que les lois de L_1 et L_2.

2) Que peut-on dire du couple (L_1, L_2) lorsque $f(y) = \alpha^2 y e^{-\alpha y} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y)$ $(\alpha > 0)$?

3) Déterminer la loi de $Z = \min\{L_1, L_2\}$.