Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2005-2006**

Fiche n° 5

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi de densités respectives f et g sur $\mathbb{R}$ alors (X, Y) a pour densité

$$f \otimes g \ : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x)g(y) \end{aligned}$$

Ex 1. L'angoisse du gardien de but.
On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes avec pour chaque épreuve trois issues possibles : *succès* avec probabilité p, *échec* avec probabilité q ou *nul* avec probabilité r $(p+q+r=1)$. On note respectivement S_i, E_i et N_i les événements *succès*, *échec*, *nul* à la i-ème épreuve,et on définit les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 égales respectivement au nombre de *succès*, *échec*, *nul* lors des n épreuves. *échec*, *nul* à la i-ème épreuve

1) Dans cette question, $n = 5$. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre 2 succès suivis d'un échec et de 2 nuls ? Quelle est celle d'obtenir (sans condition d'ordre) 2 succès, 1 échec et 2 nuls ?

2) Généraliser en montrant que la probabilité d'obtenir au cours des n épreuves (et sans condition d'ordre) i succès, j échecs et k nuls $(i + j + k = n)$ vaut :

$$\frac{n!}{i!\,j!\,k!} p^i q^j r^k.$$

Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité qui est celle du vecteur aléatoire (X_1, X_2, X_3).

3) Quelle est la loi des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 ? Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4) On revient au cas $n = 5$ et on définit la variable aléatoire $Z = X_1 - X_2$. Calculer $P(Z = 0)$.

5) *Application* : Un match de coupe entre deux équipes de football s'étant terminé sur un score nul, l'équipe qualifiée est désignée par la séance des penaltys. Un joueur de l'équipe A tire un penalty face au gardien de l'équipe B, puis un joueur de l'équipe B tire un penalty face à celui de l'équipe A et ainsi de suite jusqu'à ce que chaque équipe ait tiré 5 penaltys. On admet que la probabilité de réussir un penalty est dans chaque cas

de 0,7 et que tous les tirs sont indépendants. Calculer la probabilité que les deux équipes soient encore à égalité après avoir tiré chacune ses 5 penaltys. Calculer la probabilité de qualification de A au bout de ses 5 penaltys.

Ex 2. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur A. On considère les trois cas suivant :

1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 1 \le y \le 2x\,,\ y \le 6-x\}$,
2) $A = \left\{(x,y) \in [0,1]^2\,,\ x \ge y + \frac{1}{2} \text{ ou } x \le y \le x + \frac{1}{2}\right\}$,
3) A est le disque unité.

Pour chaque cas, donner les lois de X et Y, et étudier l'indépendance de X et Y.

Ex 3. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(2x+y)\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,2]}(x,y).$$

1) Calculer $P(X \in [0,1])$, $P(X \le \frac{1}{2})$, $P(Y \le 1)$, $P(X \le \frac{1}{2}\,;\ Y \le 1)$ et $P(X+Y \le 1)$.
2) Quelle est les lois marginales de X et Y ?
3) Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.
4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Ex 4. *Consommation d'eau (suite)*
La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :

$$f(t) = c(t-a)(b-t)\mathbb{1}_{[a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$).

1) En notant X_i la consommation du i-ième jour et en supposant que les X_i sont indépendantes et de même loi que X, exprimer à l'aide de la fonction de répartition F de X et de n, la fonction de répartition de la variable aléatoire $M_n = \max_{1\le i\le n} X_i$.

2) En fait, la ville est alimentée en eau par un canal qui peut fournir au maximum une quantité journalière d'eau $x_0 = a + 0.9(b-a)$ et par un réservoir de sécurité dans lequel on peut puiser en cas de trop forte demande. Calculer numériquement la probabilité qu'au cours des 31 jours du mois de juillet, on ne fasse jamais usage du réservoir de sécurité (le résultat ne dépend ni de a ni de b).

Entrainement supplémentaire facultatif :

Ex 5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi normale centrée réduite et $P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}$.

1) Quelle est la loi de $Z = XY$?
2) Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

3) Soit $U = X + Y$. Quelle est la loi de U ?

Ex 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres α. Déterminer les lois de $-Y$, $X+Y$ et $X-Y$.

Ex 7. Soit L une variable aléatoire positive admettant une densité de probabilité f et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de L. On définit deux variables aléatoires L_1 et L_2 par $L_1 = XL$ et $L_2 = (1-X)L$ (cela représente par exemple la rupture aléatoire en deux morceaux de longueur L_1 et L_2, d'une certaine molécule de longueur aléatoire L).

1) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) ainsi que les lois de L_1 et L_2.
2) Que peut-on dire du couple (L_1, L_2) lorsque $f(y) = \alpha^2 y e^{-\alpha y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$ $(\alpha > 0)$?
3) Déterminer la loi de $Z = \min\{L_1, L_2\}$.