Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS-Math314 **Année 2006-2007**

Fiche n° 4

Ex 1. *La méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se propose de donner une valeur approchée de

$$m := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

par une méthode probabiliste appelée « méthode de Monte-Carlo ». Pour cela on utilise la simulation informatique d'une suite $(U_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$M_{2n} := \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f(U_i) \quad \text{et} \quad \tilde{M}_{2n} := \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(U_i) + f(1-U_i)\right)$$

1) Expliquer pourquoi $X_1 := f(U_1)$ et $Y_1 := f(U_1) + f(1-U_1)$ sont intégrables et exprimer leur espérance à l'aide de l'intégrale m.

2) En vous appuyant sur un théorème du cours, montrer que les suites $(M_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\tilde{M}_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent presque sûrement vers m quand n tend vers $+\infty$.

Ce résultat légitime pour n « grand » l'approximation de m par la valeur $M_{2n}(\omega)$ (ou $\tilde{M}_{2n}(\omega)$) calculée à partir de l'échantillon généré par l'ordinateur.

3) Expliquer pourquoi X_1 et Y_1 sont de carré intégrable et exprimer leur variance à l'aide de la fonction f.

4) On suppose de plus que f est croissante sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $(f(x) - f(y))\,(f(1-x) - f(1-y)) \leq 0$.

b) En déduire que $\mathbf{E}\left[f(U_1)f(1-U_1)\right] \leq \mathbf{E}\left[f(U_1)\right]^2$.

c) Comparer les variances de M_{2n} et de $\tilde{M}_{2n}$.

d) Finalement, quelle valeur choisiriez-vous entre $M_{2n}(\omega)$ ou $\tilde{M}_{2n}(\omega)$ pour approximer m ?

5) En utilisant le théorème limite central, proposer un intervalle de confiance pour m de niveau 95% (en négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne) en supposant que l'on connait un majorant M de $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

Ex 2. *Simulation de loi de Poisson*

On simule des variables aléatoires U_i indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit $M_n := \prod_{i=1}^n U_i$ pour tout entier $n \geq 1$.

1) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

2) Pour $\alpha > 0$, on définit la variable aléatoire

$$Y := \inf\left\{n \in \mathbb{N} \;:\; M_{n+1} < \mathrm{e}^{-\alpha}\right\},$$

avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$. Montrer que Y est finie presque sûrement et donner sa loi.

3) En déduire le nombre moyen de variables uniformes nécessaires pour simuler une variable aléatoire de même loi que Y.

4) On veut simuler un échantillon de 400 variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 4. A l'aide du théorème limite central, construire un intervalle de confiance du nombre total de variables uniformes simulées de niveau au moins égal à 99%.

Ex 3. *Simulation de lois de Weibull*

Les lois de Weibull sont très utilisées en fiabilité. La loi $\mathrm{Weib}(a, b, c)$ de paramètres $a > 0$, $b \geq 0$ et $c > 0$ est caractérisée par sa fonction de survie donnée par

$$G_{a,b,c}(x) = \exp\Big(-\Big(\frac{x-b}{c}\Big)^a\Big), \text{ pour } x \geq b.$$

1) La loi de Weibull $\mathrm{Weib}(a) := \mathrm{Weib}(a, 0, 1)$ a pour fonction de survie

$$G_a(x) = \exp(-x^a), \text{ pour } x \geq 0.$$

Expliquer comment simuler une telle loi par la méthode d'inversion de la fonction de répartition.

2) Comment en déduire une simulation d'une loi de Weibull $\mathrm{Weib}(a, b, c)$ de paramètres $a > 0$, $b \geq 0$ et $c > 0$?

Ex 4. On cherche à simuler une variable aléatoire X dont la densité f sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = x\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{]1,2]}(x).$$

1) Expliquer comment simuler X en utilisant la méthode par inversion de la fonction de répartition .

2) Expliquer comment simuler X en utilisant la méthode de rejet à partir de la loi uniforme sur $[0, 2]$.

3) Soit Y et Z des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme respectivement sur $[0, 1]$ et sur $[0, 2]$. Quelle est la densité de $S = \max(Y, Z)$? En déduire une autre méthode de simulation de X.

Ex 5. *Simulation d'une loi uniforme sur le disque unité*

Expliquer comment on peut simuler une loi uniforme sur le disque unité D (en précisant le nombre moyen d'appel au générateur). Que se passe-t-il en dimension supérieure ?
Indication : Le volume V_d de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^d$ est donné par
$V_d = \dfrac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$, où la fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.