Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Fiche n° 4

Ex 1. Le temps d'attente (en minutes) pour accéder à des données suit une loi uniforme $\mathcal{U}([1,6])$.

1) Déterminer la probabilité d'attendre au moins 5 minutes.
2) Déterminer le temps d'attente moyen.

Ex 2. Soit X une variable uniforme sur $[1,3]$ et $a \in [1,3]$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, a\}$? Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Ex 3. [Deux lois sans mémoire]

1) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p.
   (a) Rappeler les valeurs de $P(X = k)$ (pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$) et calculer la fonction de répartition de X.
   (b) En utilisant la fonction de répartition de X, calculer $E(X)$.
   (c) Pour j et k dans $\mathbb{N}^*$, comparer $P(X > j)$ et $P(X > j + k | X > k)$. Que remarque-t-on ?
2) Le temps d'utilisation d'une ampoule avant qu'elle grille est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $a = 0.005$ (jours^{-1}).
   (a) Montrer que T a une espérance et la calculer.
   (b) Pour $s, t \in \mathbb{R}_+$, calculer la probabilité $P(T > t)$ que l'ampoule soit encore allumée au bout de t jours, et la probabilité $P(T > t + s | T > s)$ que l'ampoule dure encore t jours de plus si on constate au bout de s jours qu'elle est toujours allumée. Que remarque-t-on ?
3) On allume l'ampoule, on controle une fois par jour si elle est toujours allumée, et on note Z le nombre de jours au bout duquel on constate qu'elle a grillé. Ainsi, on pose $Z = 1$ si on trouve l'ampoule grillée au soir du premier jour, $Z = 2$ si cela se produit au soir du deuxième jour, etc. Déterminer la loi de Z.

Ex 4. [Inégalité de Chernoff]

1) Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que pour un certain $a > 0$, $\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{aX}\right)$ soit finie. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(X \geq t) \leq \mathrm{e}^{-at}\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{aX}\right). \tag{1}$$
Cette inégalité s'appelle *inégalité de Chernoff*. Dans les cas où l'on sait calculer explicitement $\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{aX}\right)$, on peut alors chercher à optimiser le majorant dans (1) en choisissant le meilleur a possible.

2) Calculer $\mathbf{E}\Big(\mathrm{e}^{aX}\Big)$ et en déduire le majorant optimal lorsque X suit :

(a) une loi normale centrée réduite ;

(b) une loi exponentielle de paramètre 1 ;

(c) une loi de Poisson de paramètre 1 ;

(d) une loi géométrique de paramètre 1/2.

Ex 5. Tous les matins, Monsieur T. sort de chez lui à un instant "au hasard" entre 7h et 7h30. Il peut prendre le bus de 7h15 ou celui de 7h30, qui le dépose 5mn plus tard à la station de métro la plus proche. Mais comme la station n'est qu'à 10mn de marche de son domicile, il préfère y aller à pied si le temps qu'il doit passer à attendre le bus est supérieur à 5mn. On note X le temps de trajet de Monsieur T. entre son domicile et le métro, et Y le temps qui s'écoule entre l'instant initial (7h) et l'arrivée de Monsieur T. à la station de métro.

1. Donner l'expression et tracer le graphe des fonctions de répartitions de X et de Y.
2. Calculer la somme des $P(X = x)$ pour tous les $x \in \mathbb{R}$ et la somme des $P(Y = y)$ pour tous les $y \in \mathbb{R}$. Ces variables aléatoires sont-elles à densités ? Sont-elles discrètes ?
3. Lire sur les graphes les valeurs des probabilités $P(X < 5)$, $P(X < 8)$, $P(X < 10)$, $P(Y < 15)$, $P(Y < 20)$, $P(Y < 22)$, $P(Y \in]20; 30[)$ et $P(Y = 35)$.
4. En moyenne, combien de temps Monsieur T. met-il à rejoindre la station de métro et à quelle heure y arrive-t-il ?

Ex 6. On munit $(\mathbb{R}^2, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2))$ de la loi uniforme sur $[0,1]^2$. Et on définit les variables suivantes par :

- $U(\omega_1, \omega_2) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$,
- $V(\omega_1, \omega_2) = \min\{\omega_1, \omega_2\}$,
- $D(\omega_1, \omega_2) = |\omega_1 - \omega_2|$,

pour $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$.

1) Déterminer la loi de ces variables aléatoires.

2) Calculer leur espérance si elle existe.

Ex 7. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = 1 - (1 + \frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{si} \quad x > 0 \quad , \; 0 \quad \text{sinon.}$$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.

2) Si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F, calculer la probabilité $P(-2 < X < 3)$. Que pouvez-vous dire du signe de X ? Calculer l'espérance de X.

Ex 8.

1) Montrer que la fonction
$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathbf{1}_{]-1,1[}(x),$$
définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2) Donner la fonction de répartition et l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire X de densité f sur $\mathbb{R}$. Comment simuler une telle variable aléatoire ?

3) Si T suit une loi de Cauchy, montrer que la variable aléatoire $Z = \dfrac{1-T^2}{1+T^2}$ a pour densité f.

Ex 9. [Contrôle de la queue gaussienne]

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite.

1) Calculer $\mathbf{E}\Big(\mathrm{e}^{aX}\Big)$ pour $a > 0$. En optimisant l'inégalité (1), Ex. 3 par rapport à a pour $t > 0$ fixé, en déduire une majoration de $P(X \geq t)$.

2) On cherche à améliorer la majoration trouvée en 1). Par une étude de fonction, déterminer
$$\sup_{t>0}\left\{P(X \geq t) - \frac{1}{t\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\right\}.$$

3) En déduire une nouvelle majoration de $P(X \geq t)$ pour $t > 0$. Est-elle meilleure que celle trouvée en 1) ?

4) Déterminer
$$\sup_{t>0}\left\{P(X \geq t)\mathrm{e}^{t^2/2}\right\}.$$
En déduire une troisième majoration de $P(X \geq t)$ pour $t > 0$ et la comparer à celle trouvée en 1).
Indication. On pourra étudier les variations de $h(t) = P(X \geq t)\mathrm{e}^{t^2/2}$ en se servant du résultat de 3).

Ex 10. [Moments de la loi normale]

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite.

1) Que valent $\mathbf{E}(X^{2n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$?

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathbf{E}(X^{2n})$. Montrer que $c_n = (2n-1)c_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une formule explicite pour $\mathbf{E}(X^{2n})$.

Ex 11. [Peut-on utiliser le th. de Beppo Levi avec une suite décroissante ?]

La réponse à cette question provocatrice est fournie par le théorème suivant.

Théorème de convergence décroissante

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite *décroissante* de v.a. positives définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose de plus que $\mathbf{E}X_1 < +\infty$. Alors la suite $(\mathbf{E}X_n)_{n\geq 1}$ converge en décroissant vers $\mathbf{E}X$, où la v.a. X est définie par $X(\omega) = \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)$, pour tout $\omega \in \Omega$.

1) Démontrez ce théorème en appliquant le théorème de Beppo Levi à une suite *croissante* convenablement construite.
2) Soit U une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans $]0,1]$ et de loi uniforme sur $]0,1]$. On considère la suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par

$$X_n = \frac{1}{U}\mathbf{1}_{]0,1/n]}(U).$$

Vérifiez qu'elle est décroissante et converge simplement vers 0 sur tout Ω. Que vaut $\mathbf{E}X_n$? Quel est l'intérêt de cette question ?

Entraînement supplémentaire

Ex 12. [Consommation d'eau]
La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :

$$f(t) = c(t-a)(b-t)\mathbf{1}_{[a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$).
1) Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b (t-a)^n(b-t)\,dt = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2) Exprimer la constante c en fonction de a et b.
3) Calculer $\mathbf{E}(X-a)$ et $\mathbf{E}\Big[(X-a)^2\Big]$. En déduire $\mathbf{E}X$ et $\operatorname{Var} X$.
4) Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X : on distinguera pour le calcul de $F(x)$ les cas $x < a$, $a \leq x \leq b$ et $x > b$ et, dans le deuxième cas, on écrira $F(x)$ en fonction de $(x-a)$ et $(b-x)$ sans développer ni réduire le polynôme obtenu. Donner l'allure des représentations graphiques de f et F. Proposer une interprétation physique des constantes a et b.

Ex 13. Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est finie. On la note $\Gamma(\alpha)$.
1) Montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier n non nul.
2) Donner la valeur de $\Gamma(1/2)$.
3) En déduire la valeur de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x,$$

pour tout entier n (retrouver les résultats de l'exercice 10).

Ex 14. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1[$. Quelle est la loi de $|X|$, X^2, et $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+X}{1-X}\right)$? Calculer leur espérance si elle existe.

Ex 15. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la densité est

$$f(x) = \frac{x+\ln x}{x^2}\mathbf{1}_{[1,a]}(x),$$

pour $a > 1$.

1) Montrer que a est défini de façon unique et que $a < e$.

2) Quelle est la fonction de répartition de X et son espérance ?

Ex 16. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et n un entier supérieur ou égal à 2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}^*$, la probabilité $P(a < X < na)$ est-elle maximale ?