

Fiche n° 4

Ex 1. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} dont le graphe est donné par

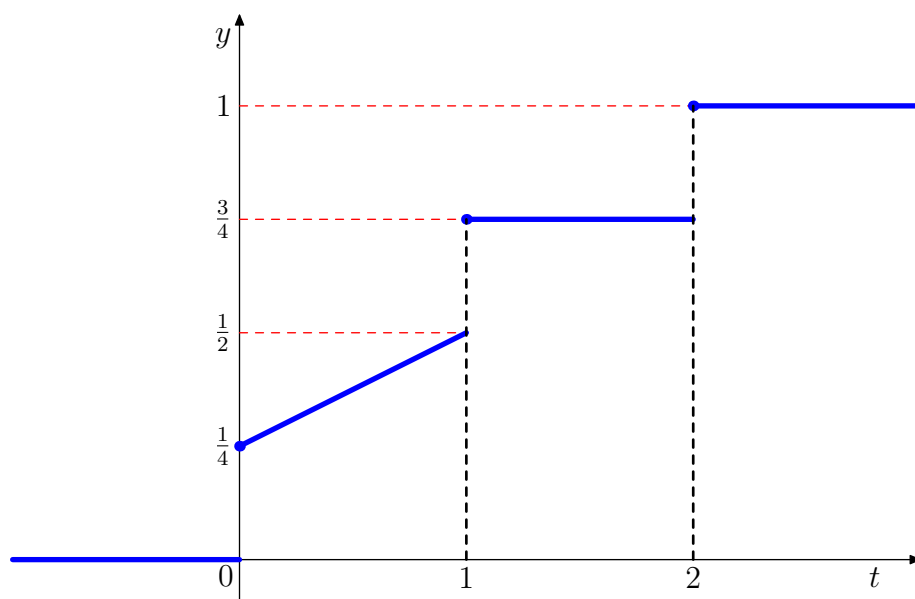


FIG. 1 – Graphe $y = F(t)$

- 1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité.
- 2) Soit X est une variable aléatoire de fonction de répartition F . Donner (sans calculs) les probabilités $P(X < 0)$, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X \in]0, 1[)$ et $P(X \in [0, 3/2])$.
- 3) La loi de la variable aléatoire X est-elle discrète, à densité ?
- 4) Quelle est l'espérance de X (on pourra la donner sans faire de calculs) ?

Ex 2. Le temps d'attente (en minutes) pour accéder à des données suit une loi uniforme $\mathcal{Unif}([1, 6])$.

- 1) Déterminer la probabilité d'attendre au moins 4 minutes.

2) Déterminer le temps d'attente moyen.

Ex 3. Soit X une variable uniforme sur $[1, 3]$ et $a \in [1, 3]$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, a\}$? Admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

Ex 4. déchargement de bateaux (suite)

On reprend le cadre de l'exercice 5 de la fiche n° 2. Et on note T le temps d'attente du bateau A.

- 1) Calculer la loi de T .
- 2) Montrer que T admet une espérance et la calculer.

Ex 5. Inégalité de Chernoff

1) Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{F}, P) telle que pour un certain $a > 0$, $\mathbb{E}(e^{aX})$ soit finie. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(X \geq t) \leq e^{-at} \mathbb{E}(e^{aX}). \quad (1)$$

2) Cette inégalité s'appelle *inégalité de Chernoff*. Dans les cas où l'on sait calculer explicitement $\mathbb{E}(e^{aX})$, on peut alors chercher à améliorer cette majoration en optimisant le majorant $M(a) := e^{-at} \mathbb{E}(e^{aX})$ en a . Faut-il chercher à minimiser ou à maximiser $M(a)$?

Ex 6. Tous les matins, Monsieur T. sort de chez lui à un instant "au hasard" entre 7h et 7h30. Il peut prendre le bus de 7h15 ou celui de 7h30, qui le déposent 5mn plus tard à la station de métro la plus proche. Mais comme la station n'est qu'à 10mn de marche de son domicile, il préfère y aller à pied si le temps qu'il devrait passer à attendre le bus est supérieur à 5mn. On note X le temps de trajet de Monsieur T. entre son domicile et le métro, et Y le temps qui s'écoule entre l'instant initial (7h) et l'arrivée de Monsieur T. au métro.

- 1) Donner l'expression et tracer le graphe des fonctions de répartitions de X et de Y .
- 2) Calculer la somme des $P(X = x)$ pour tous les $x \in \mathbb{R}$ et la somme des $P(Y = y)$ pour tous les $y \in \mathbb{R}$. Ces variables aléatoires sont-elles à densités? Sont-elles discrètes?
- 3) Lire sur les graphes les valeurs des probabilités $P(X < 5)$, $P(X < 8)$, $P(X < 10)$, $P(Y < 15)$, $P(Y < 20)$, $P(Y < 22)$, $P(Y \in]20; 30[)$ et $P(Y = 35)$.
- 4) En moyenne, combien de temps Monsieur T. met-il à rejoindre la station de métro et à quelle heure y arrive-t-il?

Ex 7. On munit $(\mathbb{R}^2, \text{Bor}(\mathbb{R}^2))$ de la loi uniforme sur $[0, 1]^2$. Et on définit les variables suivantes par :

- $U(\omega_1, \omega_2) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$,
- $V(\omega_1, \omega_2) = \min\{\omega_1, \omega_2\}$,
- $D(\omega_1, \omega_2) = |\omega_1 - \omega_2|$,

pour $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$.

- 1) Déterminer la loi de ces variables aléatoires.
- 2) Calculer leur espérance si elle existe.

Ex 8. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{si } x > 0, \quad 0 \quad \text{sinon.}$$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.

2) Si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F , calculer la probabilité $P(-2 < X < 3)$. Que pouvez-vous dire du signe de X ? Calculer l'espérance de X .

Ex 9.

- 1) Montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{]-1,1[}(x),$$

définit une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

2) Donner la fonction de répartition et l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire X de densité f sur \mathbb{R} . Comment simuler une telle variable aléatoire?

3) Si T suit une loi de Cauchy, montrer que la variable aléatoire $Z = \frac{1-T^2}{1+T^2}$ a pour densité f .

Ex 10. Consommation d'eau

La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :

$$f(t) = c(t-a)(b-t) \mathbb{1}_{[a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$).

- 1) Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b (t-a)^n (b-t) dt = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

- 2) Exprimer la constante c en fonction de a et b .
- 3) Calculer $\mathbb{E}(X-a)$ et $\mathbb{E}[(X-a)^2]$. En déduire $\mathbb{E}X$ et $\text{Var}X$.

4) Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X : on distinguera pour le calcul de $F(x)$ les cas $x < a$, $a \leq x \leq b$ et $x > b$ et, dans le deuxième cas, on écrira $F(x)$ en fonction de $(x-a)$ et $(b-x)$ sans développer ni réduire le polynôme obtenu. Donner l'allure des représentations graphiques de f et F . Proposer une interprétation physique des constantes a et b .

Ex 11. Deux lois sans mémoire

1) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p .
 a) Rappeler les valeurs de $P(X = k)$ (pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$) et calculer la fonction de répartition de X .

b) En utilisant la fonction de répartition de X , calculer $E(X)$.

c) Pour j et k dans \mathbb{N}^* , comparer $P(X > j)$ et $P(X > j+k | X > k)$. Que remarque-t-on ?

2) Le temps d'utilisation d'une ampoule avant qu'elle grille est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $a = 0.005$ (jours⁻¹).

a) Montrer que T a une espérance et la calculer.

b) Pour $s, t \in \mathbb{R}_+$, calculer la probabilité $P(T > t)$ que l'ampoule soit encore allumée au bout de t jours, et la probabilité $P(T > t+s | T > s)$ que l'ampoule dure encore t jours de plus si on constate au bout de s jours qu'elle est toujours allumée. Que remarque-t-on ?

3) On allume l'ampoule, on contrôle une fois par jour si elle est toujours allumée, et on note Z le nombre de jours au bout duquel on constate qu'elle a grillé. Ainsi, on pose $Z = 1$ si on trouve l'ampoule grillée au soir du premier jour, $Z = 2$ si cela se produit au soir du deuxième jour, etc. Déterminer la loi de Z .

Ex 12. Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite.

1) Que valent $\mathbb{E}(X^{2n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$?

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathbb{E}(X^{2n})$. Montrer que $c_n = (2n-1)c_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une formule explicite pour $\mathbb{E}(X^{2n})$.

Entraînement supplémentaire

Ex 13. Contrôle de la queue gaussienne

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite.

1) Calculer $\mathbb{E}(e^{aX})$ pour $a > 0$. En optimisant l'inégalité (1), Ex. 3 par rapport à a pour $t > 0$ fixé, en déduire une majoration de $P(X \geq t)$.

2) On cherche à améliorer la majoration trouvée en 1). Par une étude de fonction, déterminer

$$\sup_{t>0} \left\{ P(X \geq t) - \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \right\}.$$

3) En déduire une nouvelle majoration de $P(X \geq t)$ pour $t > 0$. Est-elle meilleure que celle trouvée en 1) ?

4) Déterminer

$$\sup_{t>0} \left\{ P(X \geq t) e^{t^2/2} \right\}.$$

En déduire une troisième majoration de $P(X \geq t)$ pour $t > 0$ et la comparer à celle trouvée en 1).

Indication. On pourra étudier les variations de $h(t) = P(X \geq t) e^{t^2/2}$ en se servant du résultat de 3).

Ex 14. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1[$. Quelle est la loi de $|X|$, X^2 , et $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+X}{1-X} \right)$? Calculer leur espérance si elle existe.

Ex 15. Soit X une variable aléatoire de densité

$$f_X(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si } t \in [-1, 0[\\ \alpha & \text{si } t \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Déterminer α .
- 2) Calculer et représenter la fonction de répartition F_X de X .
- 3) Donner sans calcul $P(X > 1/2)$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$.

Ex 16. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} dont la densité est

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2} \mathbb{1}_{[1, a]}(x),$$

pour $a > 1$.

- 1) Montrer que a est défini de façon unique et que $a < e$.
- 2) Quelle est la fonction de répartition de X et son espérance ?

Ex 17. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et n un entier supérieur ou égal à 2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}^*$, la probabilité $P(a < X < na)$ est-elle maximale ?

Ex 18. Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

est finie. On la note $\Gamma(\alpha)$.

- 1) Montrer que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour tout entier n non nul.
- 2) Donner la valeur de $\Gamma(1/2)$.
- 3) En déduire la valeur de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

pour tout entier n (retrouver les résultats de l'exercice 12).

Ex 19.

- 1) Vérifier que la fonction

$$f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x),$$

définit une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

- 2) Soit X une variable aléatoire de densité $f_{a,b}$ sur \mathbb{R} (on dit que X suit une loi Gamma de paramètres (a, b)). Déterminer l'espérance et les moments de X .
- 3) Montrer que si Y suit une loi normale centrée réduite alors Y^2 suit une loi Gamma dont on déterminera les paramètres.