Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2005-2006**

Fiche n° 4

Ex 1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné par

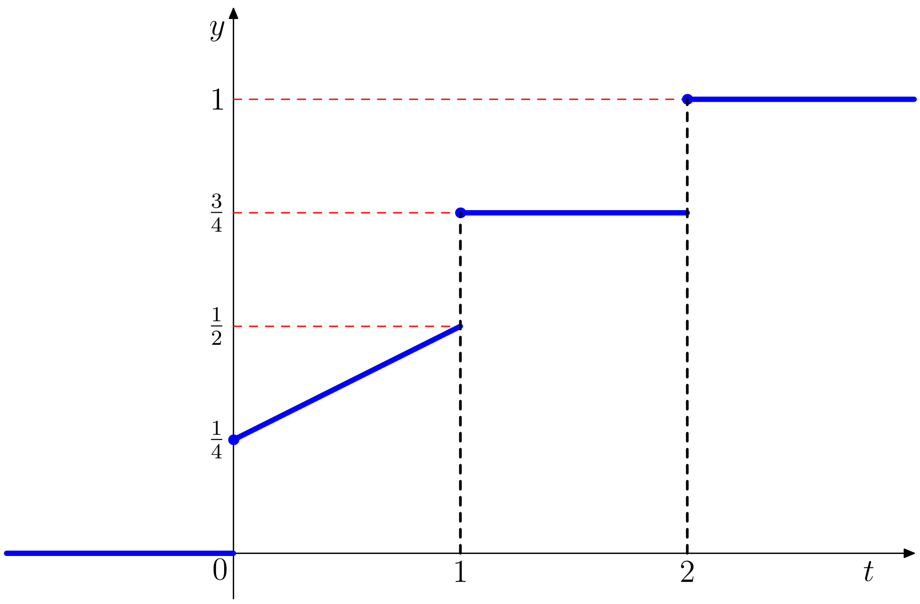

FIG. 1 – Graphe $y = F(t)$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité.

2) Soit X est une variable aléatoire de fonction de répartition F. Donner (sans calculs) les probabilités $P(X < 0)$, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X \in]0, 1[)$ et $P(X \in [0, 3/2[)$.

3) La variable aléatoire X peut-elle être une variable aléatoire discrète, à densité ?

4) Quelle est l'espérance de X (on pourra la donner sans faire de calculs) ?

Ex 2. Soit X une variable uniforme sur $[1, 3]$ et $a \in [1, 3]$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, a\}$? Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Ex 3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = 1 - (1 + \frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{si} \quad x > 0 \quad , \; 0 \quad \text{sinon.}$$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.

2) Si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F, calculer la probabilité $P(-2 < X < 3)$. Que pouvez-vous dire du signe de X ? Calculer l'espérance de X.

Ex 4. On munit $(\mathbb{R}^2, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2))$ de la loi uniforme sur $[0,1]^2$. Et on définit les variables suivantes par :
- $U(\omega_1, \omega_2) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$,
- $V(\omega_1, \omega_2) = \min\{\omega_1, \omega_2\}$,
- $D(\omega_1, \omega_2) = |\omega_1 - \omega_2|$,

pour $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$.

1) Déterminer la loi de ces variables aléatoires.

2) Calculer leur espérance si elle existe.

Ex 5.

1) Montrer que la fonction
$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{]-1,1[}(x),$$
définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2) Donner la fonction de répartition et l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire X de densité f sur $\mathbb{R}$. Comment simuler une telle variable aléatoire ?

3) Si T suit une loi de Cauchy, montrer que la variable aléatoire $Z = \dfrac{1-T^2}{1+T^2}$ a pour densité f.

Ex 6. *Consommation d'eau*
La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :
$$f(t) = c(t-a)(b-t)\mathbb{1}_{[a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$).

1) Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\int_a^b (t-a)^n(b-t)\,dt = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2) Exprimer la constante c en fonction de a et b.

3) Calculer $\mathbb{E}(X-a)$ et $\mathbb{E}\big[(X-a)^2\big]$. En déduire $\mathbb{E}X$ et $\mathrm{Var}X$.

4) Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X : on distinguera pour le calcul de $F(x)$ les cas $x < a$, $a \leq x \leq b$ et $x > b$ et, dans le deuxième cas, on écrira $F(x)$ en fonction de $(x-a)$ et $(b-x)$ sans développer ni réduire le polynôme obtenu. Donner l'allure des représentations graphiques de f et F. Proposer une interprétation physique des constantes a et b.

Ex 7. Soit X une variable aléatoire gaussienne de paramètre $(2,4)$.

1) Calculer $P(|X| < 4)$ et $P(|X| < 4 \mid X > 2)$.

2) Déterminer α le plus grand possible tel que $P(X - 2 > \alpha) \geq 10^{-2}$.

Ex 8. On suppose que les notes d'un contrôle de probabilité suivent une loi normale de paramètre $(8,5; 4)$.

1) Quelle est la probabilité pour un étudiant d'avoir la moyenne ?

2) On veut améliorer les notes à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$. Déterminer a et b pour qu'un étudiant ait la moyenne avec une probabilité de 1/2 et une note supérieure à 8 avec une probabilité de 3/4.

Ex 9. Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite.

1) Que valent $\mathbb{E}(X^{2n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$?

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathbb{E}(X^{2n})$. Montrer que $c_n = (2n-1)c_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une formule explicite pour $\mathbb{E}(X^{2n})$.

Entrainement supplémentaire facultatif :

Ex 10. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1[$. Quelle est la loi de $|X|$, X^2, et $\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+X}{1-X}\right)$?

Ex 11. *Loi de Pareto.*

1) Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On note F_Y sa fonction de répartition. Exprimer à partir de F_Y la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire $Z = \mathrm{e}^Y$.

2) Soit a un réel strictement positif fixé. On définit la fonction f par

$$f(t) = \frac{a}{t^{a+1}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$. En déduire que f est une densité de probabilité. La loi de densité f s'appelle *loi de Pareto* de paramètre a.

3) Une variable aléatoire X a pour densité f. Calculer la fonction de répartition F_X de X.

4) Si Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a (donc de densité $g(t) = a\mathrm{e}^{-at} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$), quelle est la loi de $Z = \mathrm{e}^Y$?

Ex 12. Soit X une variable aléatoire de densité

$$f_X(t) = 1 + t \quad \text{si } t \in [-1, 0],\ \alpha \quad \text{si } t \in [0, 2],\ 0 \quad \text{sinon}.$$

1) Déterminer α.

2) Calculer et représenter la fonction de répartition F_X de X.

3) Donner sans calcul $P(X > 1/2)$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$.

Ex 13. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la densité est

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2} \mathbb{1}_{[1,a]}(x),$$

pour $a > 1$.

1) Montrer que a est défini de façon unique et que $a < e$.
2) Quelle est la fonction de répartition de X et son espérance ?

Ex 14. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et n un entier supérieur ou égal à 2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}^*$, la probabilité $P(a < X < na)$ est-elle maximale ?

Ex 15. Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

est finie. On la note $\Gamma(\alpha)$.

1) Montrer que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier n non nul.
2) Donner la valeur de $\Gamma(1/2)$.
3) En déduire la valeur de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x,$$

pour tout entier n (retrouver les résultats de l'exercice 9).

Ex 16.

1) Vérifier que la fonction

$$f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2) Soit X une variable aléatoire de densité $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$ (on dit que X suit une loi Gamma de paramètres (a, b)). Déterminer l'espérance et les moments de X.

3) Montrer que si Y suit une loi normale centrée réduite alors Y^2 suit une loi Gamma dont on déterminera les paramètres.