Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS-Math314 **Année 2007-2008**

Fiche n° 3

Ex 1. Borel-Cantelli et les retours à l'origine
Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes telles que :

$$P(X_i = +1) = p \qquad P(X_i = -1) = 1 - p = q \qquad 0 < p < 1 \quad p \neq \frac{1}{2}.$$

On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad A_n = \{S_n = 0\}$$

L'événement A_n est un retour à zéro. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega \ ; \text{ la suite } S_n(\omega) \text{ repasse une infinité de fois en } 0\} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{j\geq k} A_j.$$

1) Prouver que $P(A) = 0$.

2) En utilisant la loi forte des grands nombres, donner une conclusion plus précise permettant de retrouver le résultat précédent.

Ex 2. Une armée de singes dactylographes peut elle taper par hasard *Don Quichotte* ?
Montrer que dans le jeu de pile ou face infini, la séquence `pfffp` apparaît presque sûrement une infinité de fois. Généraliser.

Ex 3. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, d'espérance nulle et vérifiant :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}(X_i X_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que pour tout $\alpha > 1$,

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Nota bene. Vous avez bien lu, il n'y a pas d'erreur dans l'énoncé, on ne suppose pas les X_k indépendantes.

Ex 4. On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Cauchy de paramètre d'échelle $a > 0$ si elle a pour densité

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{a^2 + t^2}\right).$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Cauchy de paramètre 1. On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots X_n$.

1) La suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ?

2) On admettra que si Y_1 et Y_2 sont des v.a. indépendantes, de loi de Cauchy de paramètre d'échelle respectif a et b, Y_1+Y_2 suit la loi de Cauchy de paramètre d'échelle $a+b$. Utiliser ceci pour déterminer la loi de S_n/n et en déduire une nouvelle explication du comportement asymptotique presque sûr de cette suite.

Ex 5. Estimateur de la variance
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable ($\mathbf{E}X_1^2 < +\infty$). On pose

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad V_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2.$$

1) Vérifier que

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - M_n^2.$$

2) Montrer que V_n converge presque sûrement vers quand n tend vers l'infini.

3) Calculer $E(V_n)$. En déduire un estimateur sans biais $\tilde{V_n}$ de $\operatorname{Var} X_1$.

Ex 6. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que X_n ait pour loi une loi uniforme sur l'ensemble fini

$$A_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 7. Hasard et compensation exacte
On considère une épreuve ayant r issues élémentaires équiprobables (exemples : lancer d'une pièce $r = 2$, d'un dé $r = 6$, ...). On répète cette épreuve dans des conditions identiques. On note A_n l'événement : *au cours des nr premières épreuves, chacune des r issues distinctes se produit exactement n fois.* On dira que A_n est une *compensation exacte.*

1) Calculer $p_n = P(A_n)$.

2) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$ en utilisant la formule de Stirling.

3) En déduire que si $r \geq 4$, presque sûrement il n'y aura plus jamais de compensation exacte au delà d'un certain nombre d'épreuves.

Ex 8. Estimation du rapport signal sur bruit (Avril 2005)
On note $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que $\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$ et on note $\sigma^2 := \operatorname{Var} X_1$. On suppose de plus que l'écart-type σ est *strictement* positif. On note pour tout entier $n \geq 2$,

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad V_n := \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

On définit la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n\geq 2}$ en posant pour tout $n \geq 2$,

$$R_n := \begin{cases} \dfrac{S_n^2}{nV_n - S_n^2} & \text{si } nV_n \neq S_n^2, \\ -1 & \text{si } nV_n = S_n^2. \end{cases}$$

On admettra que R_n est bien une variable aléatoire.

1) Montrer que presque-sûrement, le dénominateur $nV_n - S_n^2$ est strictement positif à partir d'un certain rang (aléatoire).

2) Montrer que R_n converge presque-sûrement vers une limite que l'on précisera.

3) Un signal est émis sous forme d'impulsions d'intensité $a > 0$. Pour la $i^{\text{ième}}$ impulsion émise, le récepteur capte une valeur $X_i = a + Z_i$, où Z_i représente le « bruit ». On considère les Z_i comme des v.a. indépendantes, de même loi, centrées ($\mathbf{E}Z_i = 0$), de carré intégrable et d'écart-type inconnu $\sigma > 0$. Pour évaluer la qualité de la transmission, on s'intéresse au rapport « signal sur bruit », à savoir a/σ. À la réception, on ne connaît ni a ni les Z_i, les seules observations sont les X_i. Proposez dans ce contexte un estimateur p.s. convergent du rapport signal sur bruit.

4) On suppose dans cette question que les X_i ont une fonction de répartition continue et on rappelle que dans ce cas, avec probabilité 1, pour *aucun* $n \geq 2$ il n'y a d'*ex-aequo* dans l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$. Montrer que presque-sûrement, pour tout $n \geq 2$, $nV_n - S_n^2$ est *strictement* positif.

Ex 9. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et indentiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit la variable aléatoire Z_n par $Z_n = n \min(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on déterminera la loi.