Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Fiche n° 3

Ex 1. Un secrétaire appelle n clients au téléphone. La probabilité que chaque client réponde est p, et chaque client est supposé répondre indépendamment des autres.

1) Quelle est la loi de X_1, nombre de clients joints au premier essai ?
2) Trouver par le calcul la loi de X_2, nombre de clients joints au deuxième essai.
3) Retrouver ce résultat par un raisonnement direct.
4) Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?

Ex 2. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs entières, indépendantes, telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = a(1-a)^k$ et $P(Y = k) = b(1-b)^k$, où a et b sont deux éléments de $]0, 1]$.
Calculer $P(X < Y), P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.

Ex 3. Contrôleur contre fraudeur
Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 € ; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie ($0 < p < 1$). Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1) Montrer que la loi de T est donnée par

$$P(T = k) = (k-1)p^2q^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T > n)$. *Indication* : on pourra commencer par chercher une formule explicite pour la somme de la série entière

$$f(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1},$$

puis pour sa dérivée terme à terme.

3) Calculer numériquement $P(T > 60)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

Ex 4. Interprétation du graphique d'une f.d.r.
La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F représentée figure 1.

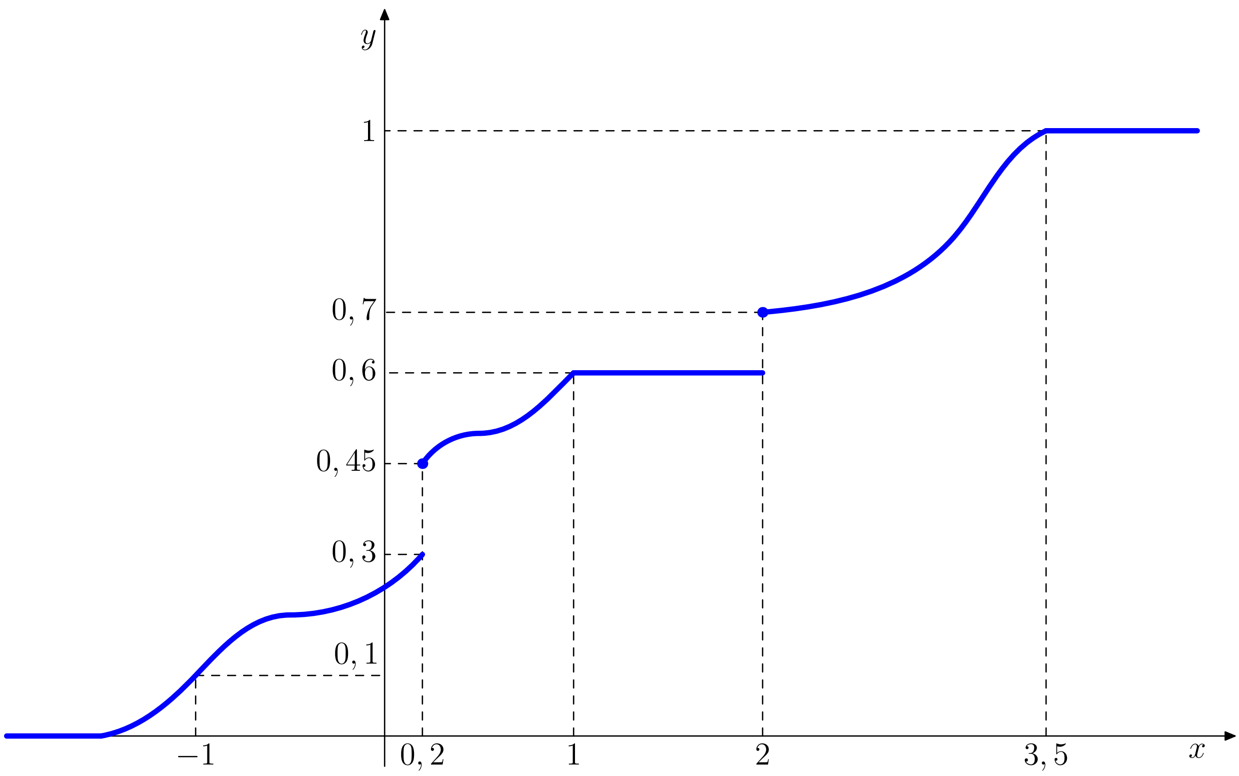

FIG. 1 – Fonction de répartition F de la v.a. X

1) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$P(X \leq -1), \quad P(X = 0{,}2), \quad P(X = 0{,}3), \quad P(X \geq 0{,}2),$$
$$P(X > 2), \quad P(X \in [1; 1{,}5]), \quad P(X \in [1; 2]), \quad P(|X| > 1).$$

2) La loi de la variable aléatoire X est-elle à densité ?

3) Calculer la somme des sauts de F. La loi de la variable aléatoire X est-elle discrète ?

Ex 5. Interprétation du graphique d'une densité
La variable aléatoire X a pour densité la fonction f représentée figure 2.

1) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$P(X \leq -2), \quad P(X = -1), \quad P(X \in [-2; 0]),$$
$$P(X > 1), \quad P(X \geq 1), \quad P(|X| > 1).$$

2) Déterminer la fonction de répartition de X.

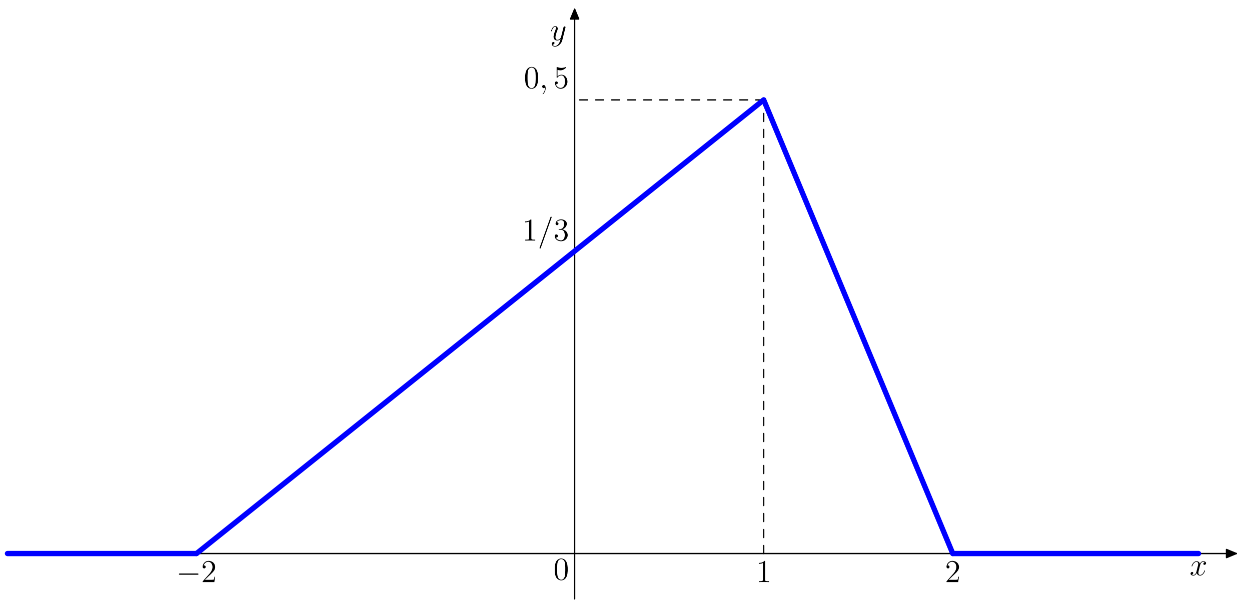

FIG. 2 – Densité f de la v.a. X

Ex 6. Un problème de tige brisée

Soit X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$Z := \frac{1-X}{X}.$$

1) Calculez explicitement la fonction de répartition de la variable aléatoire positive Z.

2) La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, calculez la.

3) On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. On notera X la longueur du morceau gauche. Quelle est la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre ?

Ex 7. Une variable aléatoire tronquée

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X est une variable aléatoire de loi exponentielle. Soient a et b deux réels fixés $0 < a < b$. On définit sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leq a, \\ X(\omega) & \text{si } a < X(\omega) \leq b, \\ b & \text{si } X(\omega) > b. \end{cases}$$

1) Dessinez l'allure de la représentation graphique de la fonction de répartition de Y en justifiant brièvement votre dessin.

2) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Si oui, calculez cette densité.

Ex 8. Durée de vie de composants électroniques

Soit le circuit électronique représenté figure 3, où C_1, C_2 et C_3 sont des composants électroniques. Ce système fonctionne si et seulement si C_1 fonctionne ainsi que C_2 ou

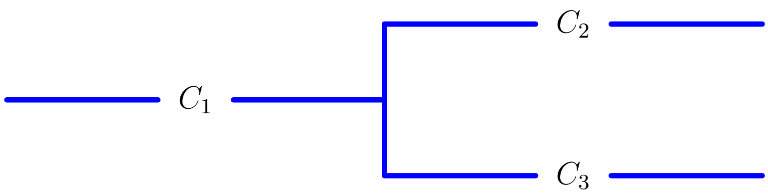

FIG. 3 – Circuit électronique

C_3. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la durée de vie V_i de C_i suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On suppose les V_i mutuellement indépendantes.

1) Exprimer la durée de vie V du système à l'aide de V_1, V_2 et V_3.

2) Quelle est la loi de V ?

Ex 9. Un peu de trigonométrie aléatoire
On définit une variable aléatoire X grâce à la construction représentée à la figure 4. L'angle $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)$ a pour mesure en radians U, *variable aléatoire* de loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. La distance AO vaut 1 et X est l'abscisse du point M sur la droite de repère $(O, \vec{i}\ )$: $\overrightarrow{OM} = X\vec{i}$. Les angles sont orientés dans le sens trigonométrique, la figure est faite pour U positif. Pour $U = 0$, M coïncide avec le point O et pour $-\pi/2 < U < 0$, M est « à gauche » de O.

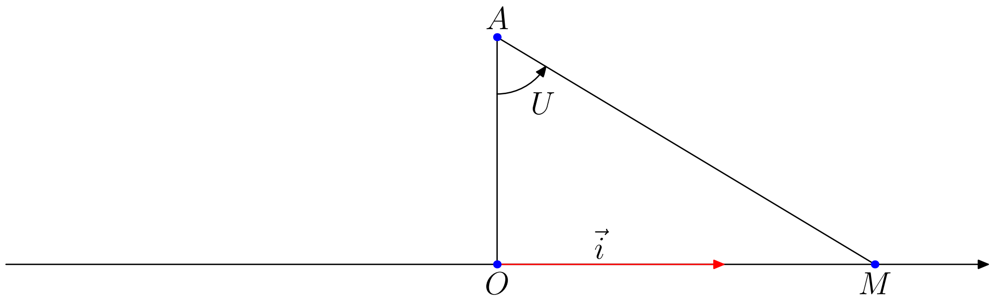

FIG. 4 – Construction de M

1) Exprimez X en fonction de U.

2) Pour x réel, calculez $P(X \leq x)$. On obtient ainsi la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X.

3) Expliquez pourquoi la loi de X est à densité et calculez cette densité. Que reconnaissez vous ainsi ?

4) Quelle est la valeur de $P(|X| \leq 1)$? Cette question peut se résoudre avec ou sans l'aide des précédentes.

Ex 10. Simulation
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $a > 0$, et dont on note F la fonction de répartition.

1) Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser directement le théorème 3.43 pour simuler la loi de X.

2) Sur quel intervalle maximal F est-elle bijective ? Déterminer sa réciproque, G, sur cet intervalle.

3) Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $Y := G(U)$. Quelle est la loi de Y ?

4) Pour conclure, expliquer pourquoi il suffit et il est intéressant de considérer $-\frac{\ln U}{a}$ pour simuler une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

Ex 11. Soit X une variable aléatoire gaussienne de paramètre $(2, 4)$.

1) Calculer $P(|X| < 4)$ et $P(|X| < 4 \mid X > 2)$.

2) Déterminer α le plus grand possible tel que $P(X - 2 > \alpha) \geq 10^{-2}$.

Ex 12. Les trajets dont il est question dans cet exercice sont censés suivre des lois normales et être indépendants.

1) Un employé E quitte son domicile à 8h30. La durée moyenne de son trajet à son lieu de travail est 25 minutes et son écart-type 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 9h sur son lieu de travail ?

2) Un autre employé, F, doit utiliser consécutivement deux moyens de transport pour se rendre à son travail. Il prend le train à 8h20, et son bus démarre à 8h45. La durée moyenne de son trajet en train est 23 minutes et, d'autre part, la probabilité que ce trajet dure entre 18 et 28 minutes est 0,6828. La durée moyenne de son trajet en bus est 14 minutes et son écart-type est 2 minutes. Quel est l'écart-type du trajet en train ? Quelle est la probabilité que F arrive avant 9h sur son lieu de travail ?

3) Seuls E et F ont une clé de leur lieu de travail. Quelle est la probabilité que cette agence ouvre avant 9h ?

4) Même question dans l'hypothèse où ils doivent être présents tous deux pour l'ouverture.

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 13. Assurances maritimes et concentration du capital
Une compagnie d'assurances assure une flotte de 500 navires de pêche valant chacun 1 million d'euros. Le risque assuré est la perte totale du navire qui est un événement de probabilité 0,001 pour une année. Les naufrages des différents navires sont considérés comme indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de navires perdus en une année.

1) Trouver la loi exacte de X.

2) Evaluer $P(X = 10)$ en utilisant une approximation de la loi de X.

3) La compagnie rembourse le 31 décembre, sur ses réserves, la valeur des bateaux assurés ayant fait naufrage dans l'année. A combien doivent s'élever ces réserves financières pour qu'elle puisse effectuer la totalité de ces remboursements avec une probabilité supérieure à 0,999 ?
Indication : En utilisant l'approximation poissonnienne de la loi binomiale, montrer qu'il suffit que ces réserves représentent la valeur d'un très petit nombre de navires.

4) La compagnie fusionne avec une autre compagnie identique (500 navires assurés). Reprendre brièvement la question 3) et commenter le résultat obtenu.

Ex 14. Une machine-outil produit à la chaîne des objets manufacturés et l'on sait qu'en période de marche normale la probabilité pour qu'un objet soit défectueux est p. On se propose de vérifier la machine. À cet effet, on définit la variable aléatoire T_r égale au nombre minimum de prélèvements successifs qu'il faut effectuer pour amener r objets défectueux. Calculer la loi de T_r.

Ex 15. Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec des pièces équilibrées. A lance $(n+1)$ pièces et B n pièces ($n \in \mathbb{N}^*$). Soient X et Y le nombre aléatoire de faces amenées respectivement par A et B.

1) Calculer la probabilité que $X - Y = k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

2) Calculer la probabilité que $X = Y$, que $X > Y$. *Indications : On pourra*

– *soit utiliser la formule suivante (aprés l'avoir démontrée)*

$$\sum_{i=1}^{n} C_p^i C_q^{n-i} = C_{p+q}^n,$$

– *soit faire intervenir la variable aléatoire $Z = n - Y$.*

Ex 16. Mélange de lois

On supose que le nombre N d'oeufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre α :

$$P(N = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k\,!} \qquad k \in \mathbb{N}$$

On suppose également que la probabilité de développement d'un oeuf est p et que les oeufs sont mutuellement indépendants. On note S le nombre (aléatoire) de survivants. Montrer que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\alpha$.

Ex 17. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X. On pose $Z = \min(X, c)$ où c est un réel.

1) Calculer la fonction de répartition de Z.

2) Si la loi de X a pour densité f, est-ce que la loi de Z est encore à densité ?

Ex 18. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre a. On lui associe la variable aléatoire discrète $Y = [X]$, où les crochets désignent la partie entière. Quelle est la loi de Y ? Quelle est la loi de la partie fractionnaire $Z := X - Y$?

Ex 19. On suppose que les notes d'un contrôle de probabilité suivent une loi normale de paramètre $(8,5; 4)$.

1) Quelle est la probabilité pour un étudiant d'avoir la moyenne ?

2) On veut améliorer les notes à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$. Déterminer a et b pour qu'un étudiant ait la moyenne avec une probabilité de $1/2$ et une note supérieure à 8 avec une probabilité de $3/4$.