Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2007–2008**

Fiche n° 3

Ex 1. Un questionnaire comprend 20 questions et propose pour chacune d'elles k réponses dont une seule est exacte. Un étudiant reçoit ce questionnaire et le remplit au hasard ; on note X le nombre de bonnes réponses obtenues. Le questionnaire est alors corrigé et toute réponse fausse est barrée. Le questionnaire est à nouveau remis à l'étudiant qui remplace les réponses barrées par de nouvelles. On note Y le nombre de bonnes réponses obtenues au deuxième essai.

1) Quelles sont les lois de X et Y ?

2) On appelle Z le nombre total de bonnes réponses données lors des deux essais. Quelle est la loi de Z ?

Ex 2. Une machine-outil produit à la chaîne des objets manufacturés et l'on sait qu'en période de marche normale la probabilité pour qu'un objet soit défectueux est p. On se propose de vérifier la machine. À cet effet, on définit la variable aléatoire T_r égale au nombre minimum de prélèvements successifs qu'il faut effectuer pour amener r objets défectueux. Calculer la loi de T_r.

Ex 3. *Assurances maritimes et concentration du capital.*
Une compagnie d'assurances assure une flotte de 500 navires de pêche valant chacun 1 million d'euros. Le risque assuré est la perte totale du navire qui est un événement de probabilité 0,001 pour une année. Les naufrages des différents navires sont considérés comme indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de navires perdus en une année.

1) Trouver la loi exacte de X.

2) Evaluer $P(X = 10)$ en utilisant une approximation de la loi de X.

3) La compagnie rembourse le 31 décembre, sur ses réserves, la valeur des bateaux assurés ayant fait naufrage dans l'année. A combien doivent s'élever ces réserves financières pour qu'elle puisse effectuer la totalité de ces remboursements avec une probabilité supérieure à 0,999 ?
Indication : En utilisant l'approximation poissonnienne de la loi binomiale, montrer qu'il suffit que ces réserves représentent la valeur d'un très petit nombre de navires.

4) La compagnie fusionne avec une autre compagnie identique (500 navires assurés). Reprendre brièvement la question 3) et commenter le résultat obtenu.

Ex 4. *Interprétation du graphique d'une f.d.r. (Adapté de l'examen de janvier 2005)*
La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F représentée figure 1.

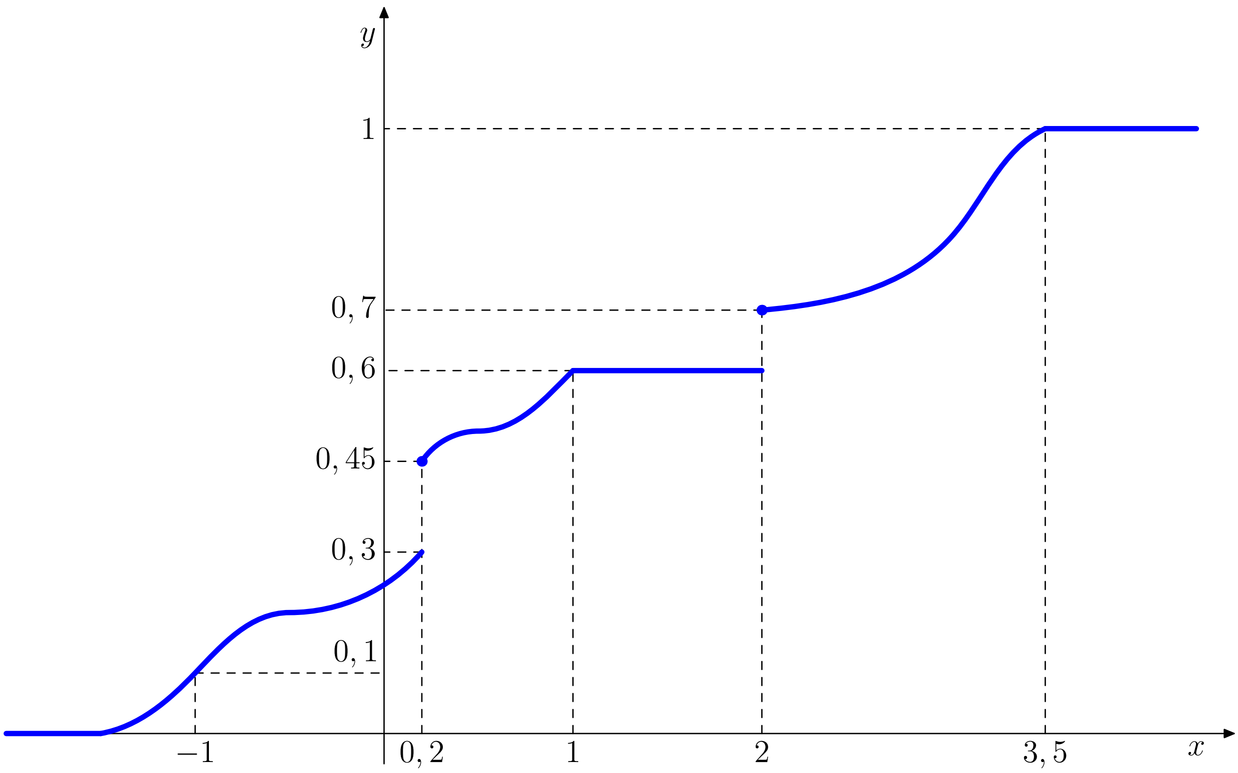

FIG. 1 – Fonction de répartition F de la v.a. X

1) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$P(X \leq -1), \quad P(X = 0{,}2), \quad P(X = 0{,}3), \quad P(X \geq 0{,}2),$$
$$P(X > 2), \quad P(X \in [1; 1{,}5]), \quad P(X \in [1; 2]), \quad P(|X| > 1).$$

2) La variable aléatoire X est-elle à densité ?

3) Calculer la somme des sauts de F. La variable aléatoire X est-elle discrète ?

Ex 5. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{-n, -n+1, \ldots, n\}$.

1) Préciser la loi de X. Quelles sont les lois de $X+Y$, de $-Y$ et de $X-Y$?
Soit X' une variable aléatoire réelle absolument continue suivant la loi uniforme sur $[-n, n+1]$.

2) Préciser la fonction de répartition et une densité de X'.

3) On pose $Y' = [X']$. Quelles sont les lois de Y' et de $D = X' - Y'$?

Ex 6. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X. On pose $Z = \min(X, c)$ où c est un réel.

1) Calculer la fonction de répartition de Z.
2) Si la loi de X a pour densité f, est-ce que la loi de Z est encore à densité ?

Ex 7. *Interprétation du graphique d'une densité*
La variable aléatoire X a pour densité la fonction f représentée figure 2.

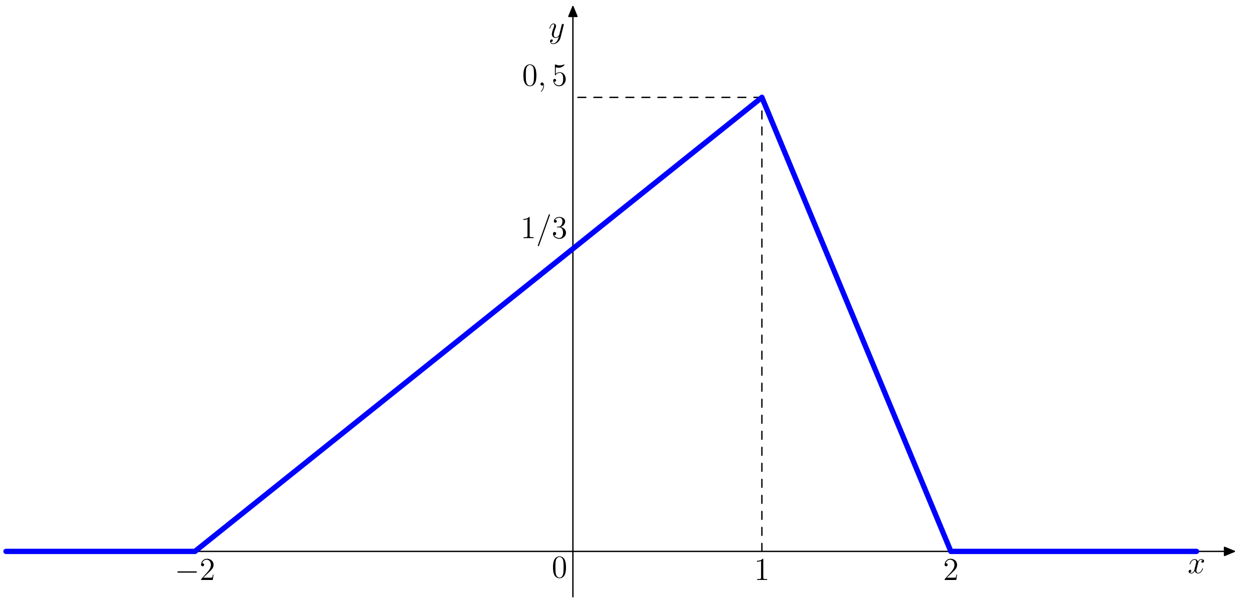

FIG. 2 – Densité f de la v.a. X

1) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$\begin{array}{lll} P(X \leq -2), & P(X = -1), & P(X \in [-2; 0]), \\ P(X > 1), & P(X \geq 1), & P(|X| > 1). \end{array}$$

2) Déterminer la fonction de répartition de X.

Ex 8. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $Y := 1 - X$.

1) Trouver la fonction de répartition de Y et en déduire sa loi.
2) Quelle est la loi de $X + Y$? Commentaires.

Ex 9. Soit le circuit électronique représenté figure 3, où C_1, C_2 et C_3 sont des composants électroniques. Ce système fonctionne si et seulement si C_1 fonctionne ainsi que C_2 ou C_3. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la durée de vie V_i de C_i suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On suppose les V_i mutuellement indépendantes.

1) Exprimer la durée de vie V du système à l'aide de V_1, V_2 et V_3.

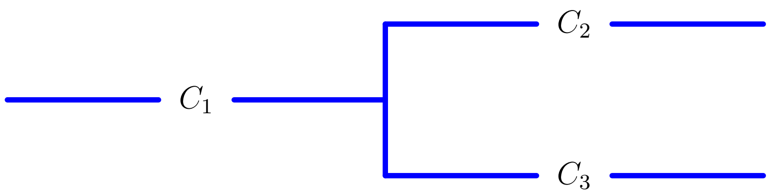

FIG. 3 – Circuit électronique

2) Quelle est la loi de V ?

Ex 10. *Simulation 1.* Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On suppose que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On pose $Y := F^{-1}(U)$, on sait alors[1] que la variable aléatoire Y a même loi que X.

1) Votre ordinateur ou votre calculatrice possèdent une fonction « random » dont chaque appel produit une valeur de $U(\omega)$ où U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Expliquer comment à partir de cette fonction random on peut simuler une variable aléatoire de loi de Cauchy dont la fonction de répartition est

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x).$$

Simulation 2. Soit maintenant X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $a > 0$, et dont on note F la fonction de répartition.

2) Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser directement le théorème 3.43 pour simuler la loi de X.

3) Sur quel intervalle maximal F est-elle bijective ? Déterminer sa réciproque, G, sur cet intervalle.

4) Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $Y := G(U)$. Quelle est la loi de Y ?

5) Pour conclure, expliquer pourquoi il suffit et il est intéressant de considérer $-\frac{\ln U}{a}$ pour simuler une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

Ex 11. Soit X une variable aléatoire gaussienne de paramètre $(2, 4)$.

1) Calculer $P(|X| < 4)$ et $P(|X| < 4 \mid X > 2)$.

2) Déterminer α le plus grand possible tel que $P(X - 2 > \alpha) \geq 10^{-2}$.

Ex 12. Les trajets dont il est question dans cet exercice sont censés suivre des lois normales et être indépendants.

1) Un employé E quitte son domicile à 8h30. La durée moyenne de son trajet à son lieu de travail est 25 minutes et son écart-type 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 9h sur son lieu de travail ?

1. C'est exactement le théorème 3.43 page 113 du polycopié.

2) Un autre employé, F, doit utiliser consécutivement deux moyens de transport pour se rendre à son travail. Il prend le train à 8h20, et son bus démarre à 8h45. La durée moyenne de son trajet en train est 23 minutes et, d'autre part, la probabilité que ce trajet dure entre 18 et 28 minutes est 0,6828. La durée moyenne de son trajet en bus est 14 minutes et son écart-type est 2 minutes. Quel est l'écart-type du trajet en train ? Quelle est la probabilité que F arrive avant 9h sur son lieu de travail ?

3) Seuls E et F ont une clé de leur lieu de travail. Quelle est la probabilité que cette agence ouvre avant 9h ?

4) Même question dans l'hypothèse où ils doivent être présents tous deux pour l'ouverture.

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 13. Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec des pièces équilibrées. A lance $(n+1)$ pièces et B n pièces ($n \in \mathbb{N}^*$). Soient X et Y le nombre aléatoire de faces amenées respectivement par A et B.

1) Calculer la probabilité que $X - Y = k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

2) Calculer la probabilité que $X = Y$, que $X > Y$.

Ex 14. *Mélange de lois.*

On supose que le nombre N d'oeufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre α :

$$P(N = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^k}{k\,!} \qquad k \in \mathbb{N}$$

On suppose également que la probabilité de développement d'un oeuf est p et que les oeufs sont mutuellement indépendants. On note S le nombre (aléatoire) de survivants. Montrer que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\alpha$.

Ex 15. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y la variable aléatoire définie sur le même espace Ω par

$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]; \\ 1 - X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

1) Quelle est la loi de Y ?

2) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := X + Y$ et vérifier que Z n'est ni discrète ni à densité.

Ex 16. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre a. On lui associe la variable aléatoire discrète $Y = [X]$, où les crochets désignent la partie entière. Quelle est la loi de Y ? Quelle est la loi de la partie fractionnaire $Z := X - Y$?

Ex 17. On suppose que les notes d'un contrôle de probabilité suivent une loi normale de paramètre $(8,5;4)$.

1) Quelle est la probabilité pour un étudiant d'avoir la moyenne ?

2) On veut améliorer les notes à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$. Déterminer a et b pour qu'un étudiant ait la moyenne avec une probabilité de $1/2$ et une note supérieure à 8 avec une probabilité de $3/4$.