Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Fiche n° 3

Ex 1. Un questionnaire comprend 20 questions et propose pour chacune d'elles k réponses dont une seule est exacte. Un étudiant reçoit ce questionnaire et le remplit au hasard ; on note X le nombre de bonnes réponses obtenues. Le questionnaire est alors corrigé et toute réponse fausse est barrée. Le questionnaire est à nouveau remis à l'étudiant qui remplace les réponses barrées par de nouvelles. On note Y le nombre de bonnes réponses obtenues au deuxième essai.

1) Quelles sont les lois de X et Y ?

2) On appelle Z le nombre total de bonnes réponses données lors des deux essais. Quelle est la loi de Z ?

Correction . Dans cet exercice, on notera $n := 20$ le nombre de questions, et $p := \frac{1}{k}$ la probabilité de répondre correctement à une question.

1) X suit une loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, p)$.
Pour $0 \leq k \leq n$, on a

$$P(Y = k) = \sum_{l=0}^{n} P(Y = k | X = l)P(X = l) = \cdots = C_n^k (p(1-p))^k (1 - p + p^2)^{n-k},$$

ce qui permet de conclure que Y suit une loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, p(1-p))$.

2) Chaque réponse a une probabilité $p(1-p)$ d'être correcte au deuxième essai. En effet, si on note $J_{i,j}$ l'évènement « la j-ième question est jointe au i-ième essai » pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq n$ alors

$$P(J_{2,j}) = P(J_{2,j} \cap J_{1,j}^c) = P(J_{2,j} | J_{1,j}^c) P(J_{1,j}^c) = p(1-p),$$

pour tout $1 \leq j \leq n$. Les réponses aux n questions étant supposées indépendantes indépendantes, on en déduit que la loi de Y est celle du nombre de succés (ici un succés étant une réponse correcte au deuxième essai) parmi une suite de n épreuves indépendantes ayant deux issues possibles et dont la probabilité de succés est $p(1-p)$: c'est donc une loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, p(1-p))$. Remarquez que Y peut s'écrire sous la forme $Y = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j$ où les $\epsilon_j = \mathbf{1}_{J_{2,j}}$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p(1-p)$.

3) On peut trouver la loi de $Z := X + Y$ par le calcul, comme à la question 2). Ou bien on remarque que Z est la variable aléatoire égale au nombre de réponses correcte

au premier ou au deuxième essai. Et la probabilité d'obtenir une réponse correcte au premier ou au deuxième essai est

$$P(J_{2,j} \cup J_{1,j}) = p + p(1-p) = p(2-p).$$

Donc, Z suit une loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, p(2-p))$.

On peut aussi écrire plus formellement que

$$X + Y = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{1}_{J_{1,j}} + \mathbf{1}_{J_{2,j}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{J_{1,j} \cup J_{2,j}}$$

et les $\left(\mathbf{1}_{J_{1,j} \cup J_{2,j}}\right)_{1 \leq j \leq n}$ forment une suite de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p(2-p)$.

Ex 2. Une machine-outil produit à la chaîne des objets manufacturés et l'on sait qu'en période de marche normale la probabilité pour qu'un objet soit défectueux est p. On se propose de vérifier la machine. À cet effet, on définit la variable aléatoire T_r égale au nombre minimum de prélèvements successifs qu'il faut effectuer pour amener r objets défectueux. Calculer la loi de T_r.

Ex 3. Assurances maritimes et concentration du capital.

Une compagnie d'assurances assure une flotte de 500 navires de pêche valant chacun 1 million d'euros. Le risque assuré est la perte totale du navire qui est un événement de probabilité 0,001 pour une année. Les naufrages des différents navires sont considérés comme indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de navires perdus en une année.

1) Trouver la loi exacte de X.

2) Evaluer $P(X = 10)$ en utilisant une approximation de la loi de X.

3) La compagnie rembourse le 31 décembre, sur ses réserves, la valeur des bateaux assurés ayant fait naufrage dans l'année. A combien doivent s'élever ces réserves financières pour qu'elle puisse effectuer la totalité de ces remboursements avec une probabilité supérieure à 0,999 ?

Indication : En utilisant l'approximation poissonnienne de la loi binomiale, montrer qu'il suffit que ces réserves représentent la valeur d'un très petit nombre de navires.

4) La compagnie fusionne avec une autre compagnie identique (500 navires assurés). Reprendre brièvement la question 3) et commenter le résultat obtenu.

Ex 4. Interprétation du graphique d'une f.d.r. *(Adapté de l'examen 01/05)*

La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F représentée figure 1.

1) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$P(X \leq -1), \quad P(X = 0{,}2), \quad P(X = 0{,}3), \quad P(X \geq 0{,}2),$$
$$P(X > 2), \quad P(X \in [1; 1{,}5]), \quad P(X \in [1; 2]), \quad P(|X| > 1).$$

2) La variable aléatoire X est-elle à densité ?

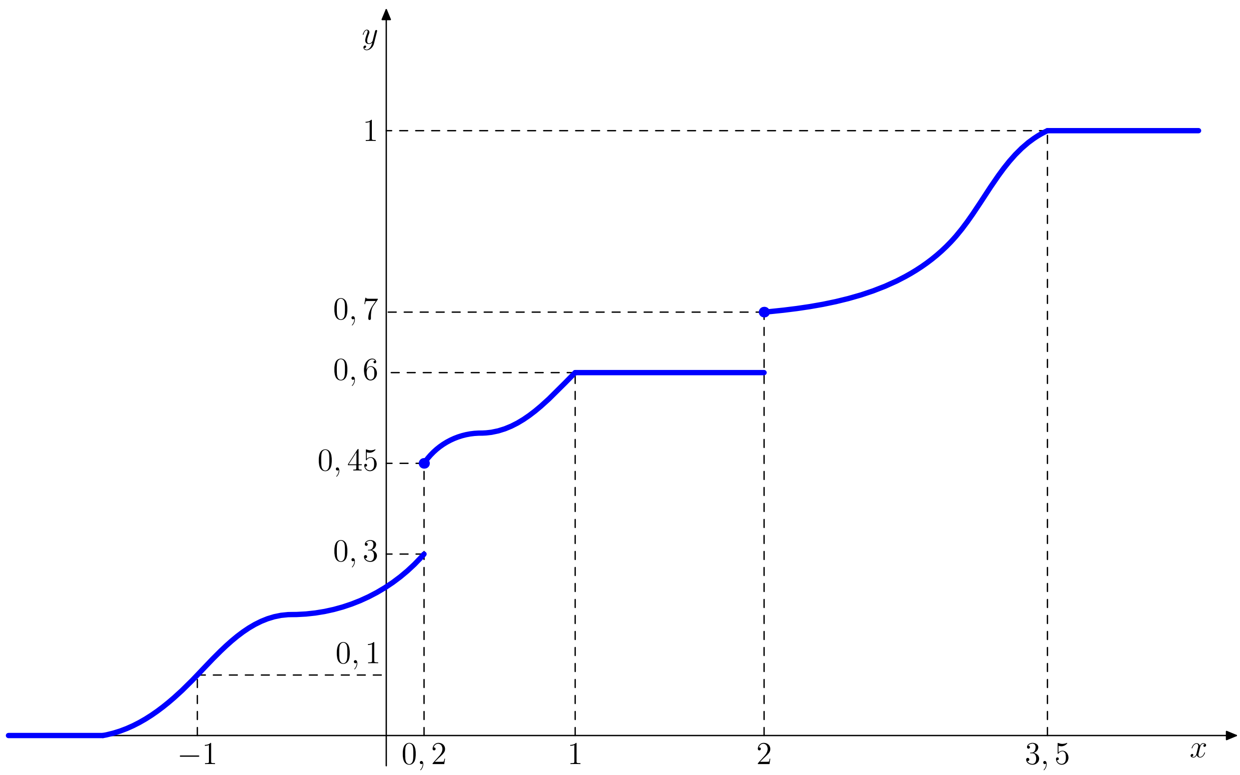

FIG. 1 – Fonction de répartition F de la v.a. X

3) Calculer la somme des sauts de F. La variable aléatoire X est-elle discrète ?

Correction .

1)

$P(X \leq -1) = 0,1$; $P(X = 0{,}2) = 0,15$; $P(X = 0{,}3) = 0$; $P(X \geq 0{,}2) = 0,7$;
$P(X > 2) = 0,3$; $P(X \in [1; 1{,}5]) = 0$; $P(X \in [1; 2]) = 0,1$; $P(|X| > 1) = 0,5$.

2) Si la loi de X était à densité, sa f.d.r. serait continue. Or F est discontinue aux points $0,2$ et 2. Donc, la loi de X n'est pas à densité.

3) La fonction F admet deux sauts d'amplitude $0,15$ et $0,1$. Donc la somme $(0,25)$ ne fait pas 1. Donc la loi de X n'est pas discrète et donc X ne peut-être une v.a. discrète.

Ex 5. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{-n, -n+1, \dots, n\}$.

1) Préciser la loi de X. Quelles sont les lois de $X+Y$, de $-Y$ et de $X-Y$?

Soit X' une variable aléatoire réelle absolument continue suivant la loi uniforme sur $[-n, n+1]$.

2) Préciser la fonction de répartition et une densité de X'.

3) On pose $Y' = [X']$. Quelles sont les lois de Y' et de $D = X' - Y'$?

Ex 6. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X. On pose $Z = \min(X, c)$ où c est un réel.

1) Calculer la fonction de répartition de Z.
2) Si la loi de X a pour densité f, est-ce que la loi de Z est encore à densité ?

Ex 7. *Interprétation du graphique d'une densité*
La variable aléatoire X a pour densité la fonction f représentée figure 2.

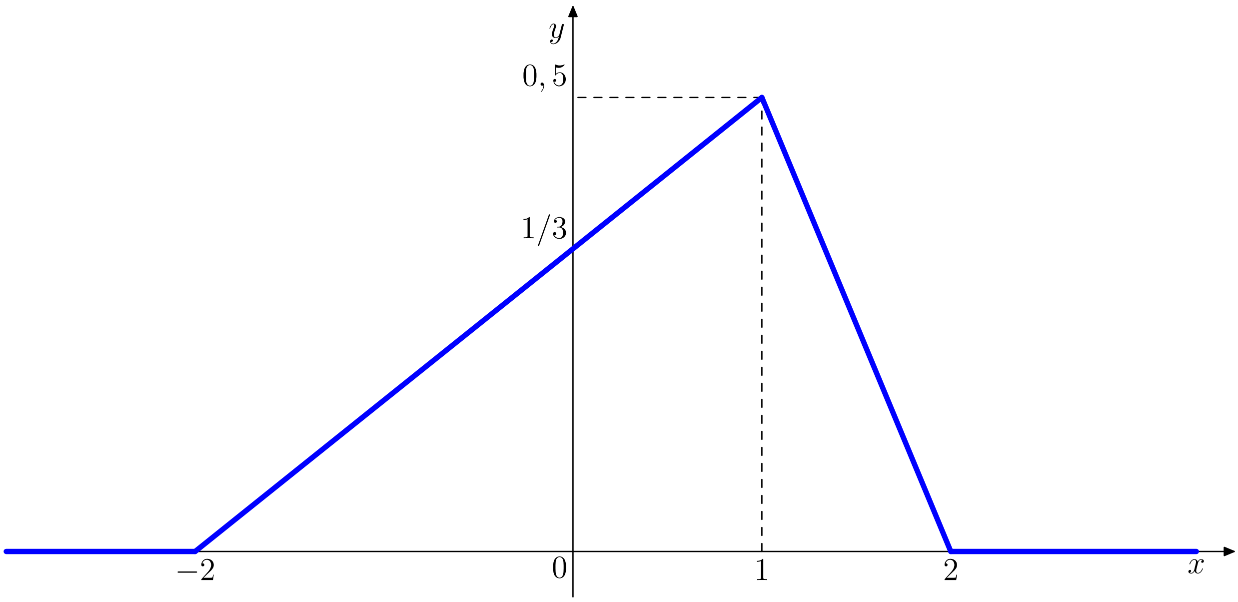

FIG. 2 – Densité f de la v.a. X

1) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$\begin{array}{lll} P(X \leq -2), & P(X = -1), & P(X \in [-2; 0]), \\ P(X > 1), & P(X \geq 1), & P(|X| > 1). \end{array}$$

2) Déterminer la fonction de répartition de X.

Ex 8. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $Y := 1 - X$.

1) Trouver la fonction de répartition de Y et en déduire sa loi.
2) Quelle est la loi de $X + Y$? Commentaires.

Correction .

1) La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F_X représentée figure 3.

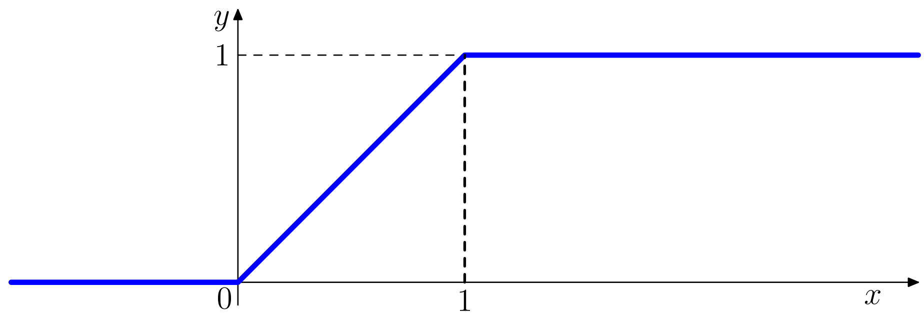

FIG. 3 – Fonction de répartition F_X de la v.a. X de loi uniforme sur $[0,1]$

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(1-X \leq x) = P(X \geq 1-x) = 1 - P(X < 1-x) \\ = 1 - F_X\left((1-x)_-\right) = 1 - F_X(1-x) = F_X(x),\end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité étant justifiée par la continuité de F_X. Donc Y suit une loi uniforme sur $[0,1]$ (elle a la même loi que X mais ce n'est pas la même variable aléatoire).

2) On a pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) + Y(\omega) = 1$, donc $P(X+Y=1) = 1$ (la variable aléatoire $X+Y$ est constante) et la loi de $X+Y$ est une masse de Dirac (ou mesure de Dirac) au point 1 (on peut noter $P_{X+Y} = \delta_1$). Sa fonction de répartition F_{X+Y} est représentée figure 4.

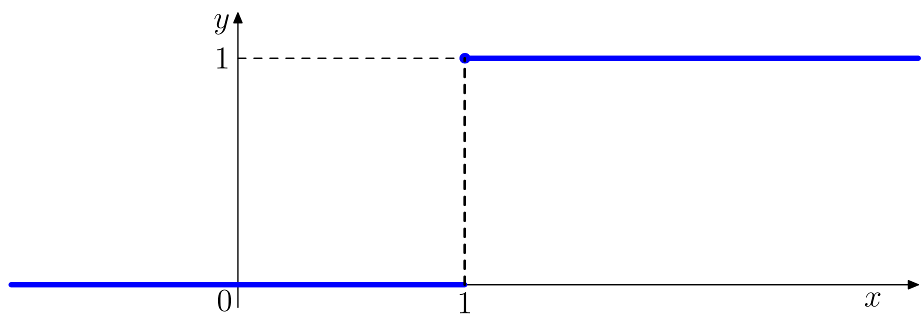

FIG. 4 – Fonction de répartition de F_{X+Y} d'une masse de Dirac au point 1

D'une manière générale, la seule connaissance des lois de X et de Y ne permet pas de déterminer celle de la somme $X+Y$.

Ex 9. Soit le circuit électronique représenté figure 5, où C_1, C_2 et C_3 sont des composants électroniques. Ce système fonctionne si et seulement si C_1 fonctionne ainsi que C_2 ou C_3. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, la durée de vie V_i de C_i suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On suppose les V_i mutuellement indépendantes.

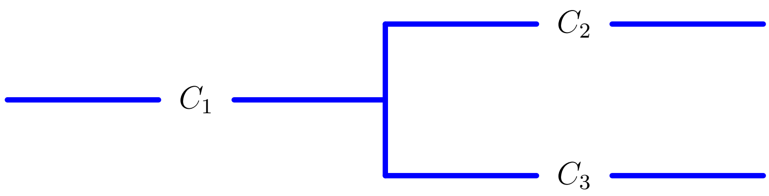

FIG. 5 – Circuit électronique

1) Exprimer la durée de vie V du système à l'aide de V_1, V_2 et V_3.
2) Quelle est la loi de V ?

Correction .

1) Pour fixer les idées, on peut imaginer que C_1, C_2 et C_3 sont des résistances et que le circuit fonctionne si et seulement si le courant peut passer de la gauche à la droite. Si on note C_1' la portion de circuit correspondant aux deux résistances en parallèle C_2 et C_3, on voit que la condition de fonctionnement du circuit global C est que le courant passe dans C_1 *et* dans C_1'. En notant V_1' la durée de fonctionnement de C_1', la durée de vie de C est donc

$$V = \min(V_1, V_1').$$

En effet tant que C_1 et C_1' fonctionnent, le circuit C fonctionne et il tombe en panne dès que l'un des deux composants C_1 ou C_1' tombe en panne. Le premier des deux à tomber en panne impose donc sa durée de vie au circuit C.

Le sous-circuit C_1' fonctionne lui tant que *l'un au moins des deux composants* C_2 *et* C_3 fonctionne. Cette fois c'est celui des deux qui a la plus longue durée de vie qui impose la durée de vie de C_1' :

$$V_1' = \max(V_2, V_3).$$

Finalement on obtient

$$V = \min(V_1, \max(V_2, V_3)).$$

2) Pour déterminer la loi de V, il suffit de savoir calculer sa fonction de répartition, ou sa fonction de survie. Pour nous guider dans ce choix, on peut remarquer que si X et Y sont deux variables aléatoires,

$$P(\max(X, Y) \le t) = P(X \le t \text{ et } Y \le t), \qquad P(\min(X, Y) > t) = P(X > t \text{ et } Y > t).$$

Lorsque X et Y sont indépendantes, ces égalités sont bien utiles, puisqu'elles permettent de se ramener à des probabilités d'intersections d'évènements indépendants.

Cherchons d'abord la loi de $V_1' = \max(V_2, V_3)$. D'après ce qui précède, il est clair que l'on a intérêt à chercher la fonction de répartition en appliquant la première des deux égalités ci-dessus avec les variables aléatoires indépendantes $X = V_2$ et $Y = V_3$. On a donc pour tout $t \ge 0$,

$$P(V_1' \le t) = P(V_2 \le t \text{ et } V_3 \le t) = P(V_2 \le t)P(V_3 \le t) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^2,$$

en utilisant l'expression de la f.d.r. d'une loi exponentielle vue en cours.

Ensuite, puisque $V = \min(V_1, V_1')$, il est préférable de chercher la fonction de survie de V. Notons que V_1, V_2 et V_3 étant indépendantes, V_1 et $V_1' = \max(V_2, V_3)$ sont indépendantes (propriété d'hérédité de l'indépendance, cf. polycopié de cours, prop. 5.29). On obtient ainsi pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(\min(V_1, V_1') > t) = P(V_1 > t \text{ et } V_1' > t) &= P(V_1 > t)P(V_1' > t) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\bigl(1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^2\bigr) \\ &= \mathrm{e}^{-2\lambda t}(2 - \mathrm{e}^{-\lambda t}). \end{aligned}$$

D'autre part, V étant une durée de vie est clairement une v.a. positive, donc pour $t < 0$, $P(V \leq t) = 0$. Nous obtenons finalement l'expression suivante pour la f.d.r. de V.

$$F_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - 2\mathrm{e}^{-2\lambda t} + \mathrm{e}^{-3\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Ce n'est pas la f.d.r. d'une loi classique.

Questions subsidiaires : vérifiez que F_V est bien croissante avec limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Tracez le graphe de F_V. Vérifiez aussi que la loi est à densité, calculez cette densité et tracez son graphe. Calculez $\mathbf{E}V$...

Ex 10. *Simulation 1.* Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On suppose que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On pose $Y := F^{-1}(U)$, on sait alors[1] que la variable aléatoire Y a même loi que X.

1) Votre ordinateur ou votre calculatrice possèdent une fonction « random » dont chaque appel produit une valeur de $U(\omega)$ où U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Expliquer comment à partir de cette fonction random on peut simuler une variable aléatoire de loi de Cauchy dont la fonction de répartition est

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x).$$

Simulation 2. Soit maintenant X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $a > 0$, et dont on note F la fonction de répartition.

2) Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser directement le théorème 3.43 pour simuler la loi de X.

3) Sur quel intervalle maximal F est-elle bijective ? Déterminer sa réciproque, G, sur cet intervalle.

4) Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $Y := G(U)$. Quelle est la loi de Y ?

1. C'est exactement le théorème 3.43 page 113 du polycopié.

5) Pour conclure, expliquer pourquoi il suffit et il est intéressant de considérer $-\frac{\ln U}{a}$ pour simuler une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

Correction .

Simulation 1.

1) Ici, on peut appliquer le Théorème 3.43 page 113 du poly car la fonction de répartition F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. Son application réciproque F^{-1} est définie par $F^{-1}(x) = \tan\left(\pi(x - \frac{1}{2})\right)$ pour tout $x \in]0,1[$. On transforme alors $U(\omega)$ (qui appartient à l'intervalle $]0,1[$ avec probabilité 1) à l'aide de F^{-1} en $Y(\omega) = F^{-1}(U(\omega))$ ce qui produit la réalisation d'une variable aléatoire Y qui a pour fonction de répartition F, c'est à dire de loi de Cauchy.

Simulation 2.

2) Ici, la fonction de répartition F donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est plus strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc le Théorème 3.43 du poly ne s'applique plus.

3) L'intervalle maximal sur lequel F est bijective est $[0,+\infty[$. Sur cet intervalle, F est continue et strictement monotone et sa réciproque est donnée par $G(x) = -\frac{1}{a}\ln(1-x)$ pour tout réel $x \in [0,1[$.

4) Si U suit une loi uniforme sur $[0,1[$ alors $Y := G(U)$ (qui est bien définie sur l'ensemble $\{U \in [0,1[\}$ de probabilité 1) a pour fonction de répartition F. En effet,
– si $x < 0$ l'ensemble $\{U \in [0,1[\} \cap \{G(U) \leq x\} = \varnothing$ puisque G est à valeurs dans $[0,+\infty[$ et donc $P(Y \leq x) = 0$,
– si $x \geq 0$, l'ensemble $\{U \in [0,1[\} \cap \{G(U) \leq x\}$ a même probabilité que $\{U \leq F(x)\}$ et donc, $P(Y \leq x) = F(x)$.
Finalement, Y suit une loi exponentielle de paramètre a.

Ex 11. Soit X une variable aléatoire gaussienne de paramètre $(2,4)$.

1) Calculer $P(|X| < 4)$ et $P(|X| < 4 \mid X > 2)$.

2) Déterminer α le plus grand possible tel que $P(X - 2 > \alpha) \geq 10^{-2}$.

Ex 12. Les trajets dont il est question dans cet exercice sont censés suivre des lois normales et être indépendants.

1) Un employé E quitte son domicile à 8h30. La durée moyenne de son trajet à son lieu de travail est 25 minutes et son écart-type 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 9h sur son lieu de travail ?

2) Un autre employé, F, doit utiliser consécutivement deux moyens de transport pour se rendre à son travail. Il prend le train à 8h20, et son bus démarre à 8h45. La durée moyenne de son trajet en train est 23 minutes et, d'autre part, la probabilité que ce trajet dure entre 18 et 28 minutes est 0,6828. La durée moyenne de son trajet en bus est 14 minutes et son écart-type est 2 minutes. Quel est l'écart-type du trajet en train ? Quelle est la probabilité que F arrive avant 9h sur son lieu de travail ?

3) Seuls E et F ont une clé de leur lieu de travail. Quelle est la probabilité que cette agence ouvre avant 9h ?

4) Même question dans l'hypothèse où ils doivent être présents tous deux pour l'ouverture.

Entraînement supplémentaire

Ex 13. Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec des pièces équilibrées. A lance $(n+1)$ pièces et B n pièces ($n \in \mathbb{N}^*$). Soient X et Y le nombre aléatoire de faces amenées respectivement par A et B.

1) Calculer la probabilité que $X - Y = k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Indications : On pourra

– *soit utiliser la formule suivante (aprés l'avoir démontrée)*

$$\sum_{i=1}^{n} C_p^i C_q^{n-i} = C_{p+q}^n,$$

– *soit faire intervenir la variable aléatoire* $Z = n - Y$.

2) Calculer la probabilité que $X = Y$, que $X > Y$.

Ex 14. *Mélange de lois.*

On supose que le nombre N d'oeufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre α :

$$P(N = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^k}{k\,!} \qquad k \in \mathbb{N}$$

On suppose également que la probabilité de développement d'un oeuf est p et que les oeufs sont mutuellement indépendants. On note S le nombre (aléatoire) de survivants. Montrer que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\alpha$.

Correction . Posons $A_{m,n} = \{S = n\} \cap \{0 \leq N \leq m\}$ et calculons d'abord $P(A_{m,n})$. Les événements $\{S = n\} \cap \{N = k\}$, pour $k = 0, \dots, m$ forment une partition de $A_{m,n}$. On a donc :

$$P(A_{m,n}) = \sum_{k=0}^{m} P(\{S = n\} \cap \{N = k\}) \tag{1}$$

Remarquons d'abord que pour $n > k$, $P(\{S = n\} \cap \{N = k\})$ vaut 0 : il ne peut pas y avoir plus de survivants que d'oeufs. Pour $k \geq n \geq 0$, on exprime $P(\{S = n\} \cap \{N = k\})$ à l'aide de $P(S = n \mid N = k)$. On obtient ainsi :

$$P(A_{m,n}) = \sum_{k=n}^{m} P(S = n \mid N = k) P(N = k) \tag{2}$$

Déterminons $P(S = n \mid N = k)$. Il s'agit de savoir quelle probabilité on peut attribuer à l'événement $\{S = n\}$ *lorsque l'on sait qu'il y a k oeufs*. Sous cette hypothèse supplémentaire, les oeufs étant indépendants, chacun avec même probabilité de développement p, on est en présence d'une suite de k épreuves répétées avec probabilité de succés p pour chacune. *Conditionnellement* à $\{N = k\}$, S suit donc la loi binomiale $\mathrm{Bin}(k, p)$, ce qui s'écrit :

$$P(S = n \mid N = k) = C_k^n p^n q^{k-n} \qquad 0 \leq n \leq k \quad q = 1 - p \tag{3}$$

En reportant dans (2), on a :

$$P(A_{m,n}) = \sum_{k=n}^{m} C_k^n p^n q^{k-n} \frac{\alpha^k}{k\,!} \mathrm{e}^{-\alpha}$$

En exprimant le coefficient binomial à l'aide de factorielles, on obtient après simplification et mise en facteur :

$$P(A_{m,n}) = \mathrm{e}^{-\alpha} \frac{p^n}{n\,!} \sum_{k=n}^{m} \frac{q^{k-n}\alpha^k}{(k-n)!} \tag{4}$$

On effectue alors le changement d'indice $k = n + j$ $(0 \leq j \leq m - n)$:

$$P(A_{m,n}) = \mathrm{e}^{-\alpha} \frac{p^n \alpha^n}{n\,!} \sum_{j=0}^{m-n} \frac{(q\alpha)^j}{j\,!} \tag{5}$$

Pour n *fixé*, la suite d'évènements $(\{S = n\} \cap \{0 \leq N \leq m\})_{m \geq 1}$ est croissante pour l'inclusion et a pour réunion l'évènement $\{S = n\}$. Par continuité séquentielle croissante de P, on a donc

$$P(\{S = n\}) = \lim_{m \to +\infty} P(\{S = n\} \cap \{0 \leq N \leq m\}).$$

En faisant tendre m vers l'infini avec n fixé dans (5), on en déduit :

$$P(S = n) = \mathrm{e}^{-\alpha} \frac{(p\alpha)^n}{n\,!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(q\alpha)^j}{j\,!} \tag{6}$$

On remarque alors que la série du deuxième membre de (6) a pour somme $\exp(q\alpha) = \exp\big((1-p)\alpha\big) = \exp(\alpha)\exp(-p\alpha)$. D'où finalement :

$$P(S = n) = \mathrm{e}^{-p\alpha} \frac{(p\alpha)^n}{n\,!} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

S suit la loi de Poisson de paramètre $p\alpha$.

Ex 15. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y la variable aléatoire définie sur le même espace Ω par

$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]; \\ 1 - X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

1) Quelle est la loi de Y ?

2) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := X + Y$ et vérifier que Z n'est ni discrète ni à densité.

Ex 16. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre a. On lui associe la variable aléatoire discrète $Y = [X]$, où les crochets désignent la partie entière. Quelle est la loi de Y ? Quelle est la loi de la partie fractionnaire $Z := X - Y$?

Ex 17. On suppose que les notes d'un contrôle de probabilité suivent une loi normale de paramètre $(8,5;4)$.

1) Quelle est la probabilité pour un étudiant d'avoir la moyenne ?

2) On veut améliorer les notes à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$. Déterminer a et b pour qu'un étudiant ait la moyenne avec une probabilité de $1/2$ et une note supérieure à 8 avec une probabilité de $3/4$.