Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE **Année 2005-2006**

Fiche n° 3

Ex 1. Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec des pièces équilibrées. A lance $(n+1)$ pièces et B n pièces ($n \in \mathbb{N}^*$). Soient X et Y le nombre aléatoire de faces amenées respectivement par A et B.

1) Calculer la probabilité que $X - Y = k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
2) Calculer la probabilité que $X = Y$, que $X > Y$.

Ex 2. Un secrétaire appelle n clients au téléphone. La probabilité que chaque client réponde est p, et chaque client est supposé répondre indépendamment des autres.

1) Quelle est la loi de X_1, nombre de clients joints au premier essai ?
2) Trouver par le calcul la loi de X_2, nombre de clients joints au deuxième essai.
3) Retrouver ce résultat par un raisonnement direct.
4) Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?

Ex 3. Une machine-outil produit à la chaîne des objets manufacturés et l'on sait qu'en période de marche normale la probabilité pour qu'un objet soit défectueux est p. On se propose de vérifier la machine. A cet effet, on définit la variable aléatoire T_r égale au nombre minimum de prélèvements successifs qu'il faut effectuer pour amener r objets défectueux. Calculer la loi de T_r.

Ex 4. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs entières, indépendantes, telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = a(1-a)^k$ et $P(Y = k) = b(1-b)^k$, où a et b sont deux éléments de $]0, 1]$.
Calculer $P(X < Y), P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.

Ex 5. Soient $p \in]0, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Le nombre aléatoire N de visiteurs d'un certain musée est supposé suivre la loi de Poisson de paramètre α. Les visiteurs choisissent indépendamment l'aile « peinture » avec la probabilité p et l'aile « sculpture » avec la probabilité $1 - p$.
Soit X le nombre de visiteurs choisissant l'aile « peinture ».

1) Il est entré 50 visiteurs ce matin. Montrer que X suit une loi binomiale de paramètres 50 et p.
2) Evaluer, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = k|N = n)$. Quelle est la loi de X ?
3) Evaluer, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $P(N = n|X = k)$.
4) Montrer que X et $N - X$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

Ex 6. Assurances maritimes et concentration du capital
Une compagnie d'assurances assure une flotte de 500 navires de pêche valant chacun 6 millions de francs. Le risque assuré est la perte totale du navire qui est un événement de probabilité 0.001 pour une année. Les naufrages des différents navires sont considérés comme indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de navires perdus en une année.

1) Trouver la loi exacte de X.

2) Evaluer $P(X = 10)$ en utilisant une approximation de la loi de X.

3) La compagnie rembourse le 31 décembre, sur ses réserves, la valeur des bateaux assurés ayant fait naufrage dans l'année. A combien doivent s'élever ces réserves financières pour qu'elle puisse effectuer la totalité de ces remboursements avec une probabilité supérieure à 0.999 ? *Indication :* En utilisant l'approximation poissonnienne de la loi binomiale, montrer qu'il suffit que ces réserves représentent la valeur d'un très petit nombre de navires.

4) La compagnie fusionne avec une autre compagnie identique (500 navires assurés). Reprendre brièvement la question 3) et commenter le résultat obtenu.

Ex 7. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $Y := 1 - X$.

1) Trouver la fonction de répartition de Y et en déduire sa loi.

2) Quelle est la loi de $X + Y$? Commentaires.

Ex 8. *Simulation 1.* Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On suppose que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On pose $Y := F^{-1}(U)$, on sait alors [1] que la variable aléatoire Y a même loi que X.

1) Votre ordinateur ou votre calculatrice possèdent une fonction « random » dont chaque appel produit une valeur de $U(\omega)$ où U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Expliquer comment à partir de cette fonction random on peut simuler une variable aléatoire de loi de Cauchy dont la fonction de répartition est

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x).$$

Simulation 2. Soit maintenant X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $a > 0$, et dont on note F la fonction de répartition.

2) Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser directement le théorème 3.40 pour simuler la loi de X.

3) Sur quel intervalle maximal F est-elle bijective ? Déterminer sa réciproque, G, sur cet intervalle.

4) Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $Y := G(U)$. Quelle est la loi de Y ?

5) Pour conclure, expliquer pourquoi il suffit et il est intéressant de considérer $-\frac{\ln U}{a}$ pour simuler une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

1. C'est exactement le théorème 3.40 page 112 du poly.

Ex 9. *Interprétation du graphique d'une f.d.r. (Adapté de l'examen de janvier 2005)*
La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F représentée figure 1.

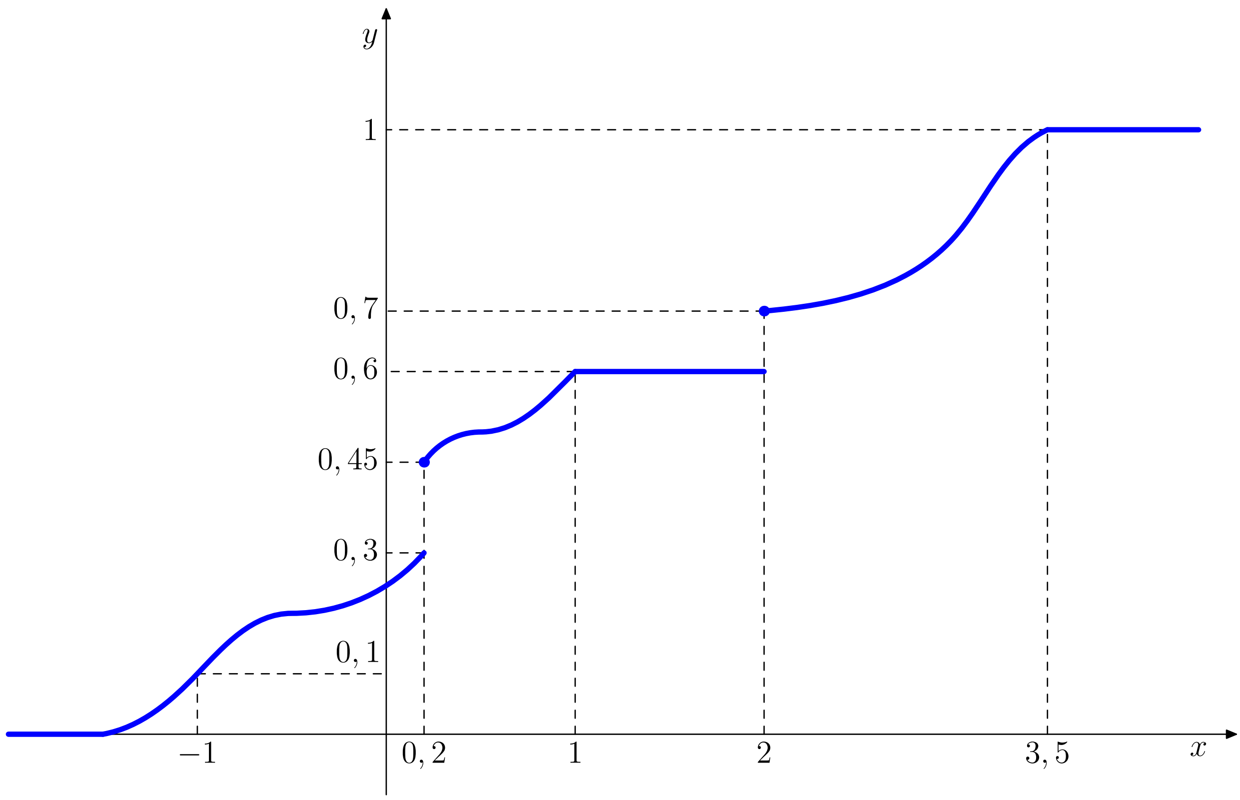

FIG. 1 – Fonction de répartition F de la v.a. X

1) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$P(X \leq -1), \quad P(X = 0{,}2), \quad P(X = 0{,}3), \quad P(X \geq 0{,}2),$$
$$P(X > 2), \quad P(X \in [1; 1{,}5]), \quad P(X \in [1; 2]), \quad P(|X| > 1).$$

2) La variable aléatoire X est-elle à densité ?

3) Calculer la somme des sauts de F. La variable aléatoire X est-elle discrète ?

Ex 10. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre a. On lui associe la variable aléatoire discrète $Y = [X]$, où les crochets désignent la partie entière. Quelle est la loi de Y ? Quelle est la loi de la partie fractionnaire $Z := X - Y$?

Ex 11. Un P.D.G. a son domicile dans un quartier résidentiel A. Il quitte son domicile à 8h45 et se rend à son bureau qui ouvre à 9h. Il utilise pour cela sa voiture de sport, la durée du trajet est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 15 minutes et d'écart-type 5 minutes.

Sa secrétaire habite dans une localité B, elle se rend à son bureau en prenant en B le train de 7h45, le train la dépose à la gare de C, de là elle doit marcher pendant 10 minutes pour prendre un autobus à 8h40 qui la dépose devant son bureau. La durée du trajet en train est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 42 minutes et d'écart-type 3 minutes, tandis que celle du trajet en bus est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 15 minutes et d'écart-type 5 minutes.

1) Quelle est la probabilité que le patron arrive à l'heure ?

2) Quelle est la probabilité que la secrétaire arrive en retard (on supposera que si elle rate le bus de 8h40, elle arrive en retard) ?

3) Quelle est la probabilité que le patron constate à 9h que sa secrétaire n'est pas encore arrivée ?

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 12. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y la variable aléatoire définie sur le même espace Ω par

$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]; \\ 1 - X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

1) Quelle est la loi de Y ?

2) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := X + Y$ et vérifier que Z n'est ni discrète ni à densité.