Université de Lille 1
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2009–2010**

Fiche n° 2

Ex 1. Hasard et compensation exacte

On considère une épreuve ayant r issues élémentaires équiprobables (exemples : lancer d'une pièce $r = 2$, d'un dé $r = 6$, $\ldots$). On répète cette épreuve dans des conditions identiques. On note A_n l'événement : *au cours des nr premières épreuves, chacune des r issues distinctes se produit exactement n fois*. On dira que A_n est une *compensation exacte*.

1) Calculer $p_n = P(A_n)$.

2) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$ en utilisant la formule de Stirling.

3) En déduire que si $r \geq 4$, presque sûrement il n'y aura plus jamais de compensation exacte au delà d'un certain nombre d'épreuves.

Ex 2. Considérons un jeu infini de pile ou face avec une pièce équilibrée et définissons la suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$$Y_k = \begin{cases} \quad 0 & \text{si le premier jet donne face,} \\ \begin{cases} 0 & \text{si le k-ème jet donne face} \\ 1 & \text{si le k-ème jet donne pile} \end{cases} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit E_n l'événement $\{Y_n = 1\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'événement « les événements E_n se produisent infiniment souvent ».

1) Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(E_n) = +\infty \quad \text{et} \quad P(E) = \frac{1}{2}.$$

2) Expliquer pourquoi ceci n'est pas en contradiction avec le Lemme de Borel-Cantelli.

Ex 3. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = X_n X_{n+1} \quad \text{et} \quad U_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

1) Quelle est la loi de Y_n $(n \in \mathbb{N}^*)$?

2) Pour quels couples (n, m) les variables Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

3) Calculer l'espérance et la variance de U_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\Big(\Big|\frac{U_n}{n} - p^2\Big| \geq \epsilon\Big) = 0.$$

Ex 4. Convergence et opérations
Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de v.a. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) On suppose que X_n et Y_n convergent en probabilité vers X et Y respectivement. Montrer que $(X_n + Y_n)$ converge en probabilité vers $X + Y$.

2) On suppose maintenant que X_n et Y_n convergent également presque sûrement vers X et Y. Montrer que $(X_n + Y_n)_n$ converge presque sûrement vers $X + Y$.

3) Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(f(X_n))_n$ converge presque sûrement vers la v.a. $f(X)$.

Ex 5. Dans cet exercice, $X_1, \dots, X_n$, sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et on note F la f.d.r. de X_1. On pose

$$M_n := \max_{1\leq i\leq n} X_i.$$

1) Exprimer à l'aide de F la f.d.r. H_n de M_n.

2) Montrer que si F est C^1, M_n a une densité que l'on peut exprimer en fonction de F.

3) On suppose dans toute la suite que les X_i sont positives et qu'il existe un réel b vérifiant

$$F(b) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x < b,\ F(x) < 1. \tag{1}$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(b - \varepsilon < M_n \leq b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On suppose désormais que chaque X_i est à valeurs dans $[0, b]$ (est-ce une grande restriction par rapport à la question précédente ?). Alors pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(M_n(\omega))_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par b, donc converge dans $\mathbb{R}_+$ vers un réel $M(\omega) \leq b$. On définit ainsi une variable aléatoire positive M.

4) Montrer que $P(M = b) = 1$. Que peut-on dire de la convergence presque sûre de la suite $(M_n)_{n\geq 1}$?

5) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E} M_n = b$. Que peut-on en déduire quant à la convergence dans L^1 de la suite $(M_n)_{n\geq 1}$?

Ex 6. Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F continue.

1) Etudier la convergence presque sûre de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier n positif par $Y_n = (\sin(X))^n$.

2) Etudier la convergence dans L^1 de cette même suite.

Ex 7. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$Y_n = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq X \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la convergence presque sûre, en probabilité, et dans L^1 de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ex 8. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, d'espérance nulle et vérifiant :

$$\forall i,j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}(X_iX_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que pour tout $\alpha > 1$,

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Nota bene. Vous avez bien lu, il n'y a pas d'erreur dans l'énoncé, on ne suppose pas les X_k indépendantes.

Ex 9. Estimateur de la variance
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable ($\mathbf{E}X_1^2 < +\infty$). On pose

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k, \qquad V_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2.$$

1) Vérifier que

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - M_n^2.$$

2) Montrer que V_n converge presque sûrement vers $\operatorname{Var} X_1$ quand n tend vers l'infini.

3) Calculer $\mathbf{E}(V_n)$.

Entraînement supplémentaire facultatif

Ex 10. Une armée de singes dactylographes peut elle taper par hasard *Don Quichotte* ?
Montrer que dans le jeu de pile ou face infini, la séquence `pfffp` apparaît presque sûrement une infinité de fois. Généraliser.

Ex 11. Soit $\alpha > 0$. Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} = 1 - P(X_n = 0).$$

1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = 0$.

2) Etudier la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ex 12. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité $(]0,1], \operatorname{Bor}(]0,1]), \lambda)$ de la façon suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad Y_n = n^{1/p}\mathbf{1}_{]0,1/n]},$$

où p est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.

1) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

2) Que vaut $\mathbf{E}(Y_n^p)$? En déduire que chaque variable aléatoire Y_n est dans L^p, mais que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans L^p.