Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2008–2009**

Fiche n° 2

Ex 1. Hasard et compensation exacte
On considère une épreuve ayant r issues élémentaires équiprobables (exemples : lancer d'une pièce $r = 2$, d'un dé $r = 6$, ...). On répète cette épreuve dans des conditions identiques. On note A_n l'événement : *au cours des nr premières épreuves, chacune des r issues distinctes se produit exactement n fois.* On dira que A_n est une *compensation exacte.*

1) Calculer $p_n = P(A_n)$.

2) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$ en utilisant la formule de Stirling.

3) En déduire que si $r \geq 4$, presque sûrement il n'y aura plus jamais de compensation exacte au delà d'un certain nombre d'épreuves.

Ex 2. Considérons un jeu infini de pile ou face avec une pièce équilibrée et définissons la suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$$Y_k = \begin{cases} 0 & \text{si le premier jet donne face} \\ \begin{cases} 0 & \text{si le k-ème jet donne face} \\ 1 & \text{si le k-ème jet donne pile.} \end{cases} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit E_n l'événement $\{Y_n = 1\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'événement « les événements E_n se produisent infiniment souvent ».

1) Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(E_n) = +\infty \quad \text{et} \quad P(E) = \frac{1}{2}.$$

2) Expliquer pourquoi ceci n'est pas en contradiction avec le Lemme de Borel-Cantelli.

Ex 3. Soit $\alpha > 0$. Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} = 1 - P(X_n = 0).$$

1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = 0$.

2) Etudier la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ex 4. Convergence presque sûre et opérations
Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de v.a. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers une v.a. X et que $(Y_n)_n$ converge presque sûrement vers une v.a. Y.

1) Montrer que la suite des sommes $(X_n + Y_n)_n$ converge presque sûrement vers la somme des limites $X + Y$.

2) Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(f(X_n))_n$ converge presque sûrement vers la v.a. $f(X)$.

Ex 5. Convergence en probabilité et opérations
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$, X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que X_n et Y_n convergent en probabilité vers X et Y respectivement.

1) Montrer que $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.

2) Montrer que $X_n Y_n$ converge en probabilité vers XY.

Indication. Commencer par montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe un réel c et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $P(|Y_n| > c) < \delta$.

Ex 6. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, d'espérance nulle et vérifiant :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}(X_i X_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que pour tout $\alpha > 1$,

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Nota bene. Vous avez bien lu, il n'y a pas d'erreur dans l'énoncé, on ne suppose pas les X_k indépendantes.

Ex 7. Loi de Cauchy
On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Cauchy de paramètre d'échelle $a > 0$ si elle a pour densité

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{a^2 + t^2}\right).$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Cauchy de paramètre 1. On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1) La suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ?

2) On admettra que si Y_1 et Y_2 sont des v.a. indépendantes, de loi de Cauchy de paramètre d'échelle respectif a et b, $Y_1 + Y_2$ suit la loi de Cauchy de paramètre d'échelle $a + b$. Utiliser ceci pour déterminer la loi de S_n/n et en déduire une nouvelle explication du comportement asymptotique presque sûr de cette suite.

Ex 8. Estimateur de la variance
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable ($\mathbf{E}X_1^2 < +\infty$). On pose

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad V_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2.$$

1) Vérifier que

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - M_n^2.$$

2) Montrer que V_n converge presque sûrement vers $\operatorname{Var} X_1$ quand n tend vers l'infini.

3) Calculer $\mathbf{E}(V_n)$.

Ex 9. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$Y_n = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq X \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la convergence presque sûre, en probabilité, et dans L^1 de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ex 10. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1]$ dont la loi a pour densité sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{]0,1]}(x).$$

On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$Y_n = (\sin(1/X))^n.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Y_n) = 0,$$

en expliquant pourquoi $\mathbf{E}(Y_n)$ est bien définie.

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 11. Borel-Cantelli et les retours à l'origine
Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes telles que :

$$P(X_i = +1) = p \qquad P(X_i = -1) = 1 - p = q \qquad 0 < p < 1 \quad p \neq \frac{1}{2}.$$

On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad A_n = \{S_n = 0\}$$

L'événement A_n est un retour à zéro. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega\ ;\ \text{la suite } S_n(\omega) \text{ repasse une infinité de fois en } 0\} = \bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{j\geq k} A_j.$$

1) Prouver que $P(A) = 0$.

2) En utilisant la loi forte des grands nombres, donner une conclusion plus précise permettant de retrouver le résultat précédent.

Ex 12. Une armée de singes dactylographes peut elle taper par hasard *Don Quichotte* ?
Montrer que dans le jeu de pile ou face infini, la séquence `pfffp` apparaît presque sûrement une infinité de fois. Généraliser.

Ex 13. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que X_n ait pour loi une loi uniforme sur l'ensemble fini

$$A_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

Ex 14. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité $(]0,1], \mathrm{Bor}(]0,1]), \lambda)$ de la façon suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad Y_n = n^{1/p}\mathbf{1}_{]0,1/n]},$$

où p est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.

1) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

2) Que vaut $\mathbf{E}(Y_n^p)$? En déduire que chaque variable aléatoire Y_n est dans L^p, mais que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans L^p.