Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2007–2008**

Fiche n° 2

Ex 1. *Covariances d'une loi multinomiale*[1]
On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles $r_1, \dots, r_k$. On note p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée. Par exemple si on lance n fois un dé, $k = 6$ et $p_i = 1/6$ pour $1 \leq i \leq 6$. Pour $1 \leq i \leq k$, notons X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1) Expliquer sans calcul pourquoi $\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$.

2) Quelle est la loi de X_i ? Que vaut sa variance ?

3) Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

4) En déduire $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$.

5) Contrôler ce résultat en développant $\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_k)$ et en utilisant la première question.

Ex 2. Soit $a > 0$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge, et on note $\Gamma(a)$ cette intégrale.

1) Pour $b > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt}\, \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut-elle ?

2) En déduire que $f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

3) Soit U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes, de densités respectives $f_{a,b}$ et $f_{c,b}$. Déterminer la loi de $U + V$.

Soit maintenant $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes, de même loi normale centrée réduite ($n > 1$).

4) Déterminer une densité de X_i^2, pour $i \in \{1, \dots, n\}$. En déduire $\Gamma(1/2)$.

5) Déterminer une densité de $Z_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2$. La loi de Z_n s'appelle loi du khi-deux à n degrés de liberté, et est notée $\chi^2(n)$.

6) Que vaut $\mathbf{E}(Z_n)$?

Ex 3. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de densité de probabilité

$$f(x, y) = C \exp\left(-x^2 + xy - y^2/2\right).$$

1) Déterminer la loi du vecteur aléatoire $(X, Y - X)$, et en déduire la loi de la variable aléatoire $X^2 + (Y - X)^2$ (au passage on précisera la constante C).

[1] Il n'est pas nécessaire de connaître la loi multinomiale pour pouvoir faire cet exercice.

2) Montrer qu'il existe deux variables aléatoires réelles U et V, indépendantes et gaussiennes, telles que le vecteur (X, Y) soit l'image du vecteur (U, V) par une application linéaire.

3) Le vecteur (X, Y) est-il gaussien ? Si oui, donner son espérance et sa matrice de covariance.

Ex 4. Dans cet exercice, $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et on note F la f.d.r. de X_1. On pose

$$M_n := \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

1) Exprimer à l'aide de F la f.d.r. H_n de M_n.

2) Montrer que si F est C^1, M_n a une densité que l'on peut exprimer en fonction de F.

3) On suppose dans toute la suite que les X_i sont positives et qu'il existe un réel b vérifiant

$$F(b) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x < b,\ F(x) < 1. \tag{1}$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(b - \varepsilon < M_n \leq b) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1. \tag{2}$$

4) On suppose désormais que chaque X_i est à valeurs dans $[0, b]$ (est-ce une grande restriction par rapport à la question précédente ?). Alors pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(M_n(\omega))_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par b, donc converge dans $\mathbb{R}_+$ vers un réel $M(\omega) \leq b$. On définit ainsi une variable aléatoire positive M. Montrer que $\mathbf{E}M = b$.

5) Montrer que $P(M = b) = 1$.

Ex 5. *Convergence en probabilité et opérations*
Soient $(X_n)_{n \geq 1}$, $(Y_n)_{n \geq 1}$, X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que X_n et Y_n convergent en probabilité vers X et Y respectivement.

1) Montrer que $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.

2) Montrer que $X_n Y_n$ converge en probabilité vers XY.

Indication. Commencer par montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe un réel c et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $P(|Y_n| > c) < \delta$.

Ex 6. *Convergence presque sûre*
Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de v.a. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers une v.a. X et que $(Y_n)_n$ converge presque sûrement vers une v.a. Y.

1) Montrer que la suite des sommes $(X_n + Y_n)_n$ converge presque sûrement vers la somme des limites $X + Y$.

2) Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(f(X_n))_n$ converge presque sûrement vers la v.a. $f(X)$.

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 7. *Somme d'une v.a. discrète et d'une v.a. à densité*

1) Sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on définit une v.a. N à valeurs dans $\mathbb{N}$ et une v.a. U de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = N + U$. Montrer que la fonction de répartition de X est *continue* sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose *de plus* que N et U sont *indépendantes*. Montrer que la f.d.r. de X est affine par morceaux (plus précisément, affine sur chaque $[n, n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$, avec raccords continus) et que X est à densité[2].

Ex 8. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité $(]0, 1], \mathrm{Bor}(]0, 1]), \lambda)$ de la façon suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad Y_n = n^{1/p}\mathbf{1}_{]0,1/n]},$$

où p est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.

1) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

2) Que vaut $E(Y_n^p)$? En déduire que chaque variable aléatoire Y_n est dans L^p, mais que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans L^p.

[2] La proposition 3.27 page 99 du poly d'IPE ne peut s'appliquer ici, car la fonction de répartition de X n'est *a priori* dérivable que sur $\mathbb{R}$ privé d'une infinité de points. On admettra cependant que la proposition 3.27 se généralise au cas où l'ensemble fini des points de discontinuité de F' est remplacé par un ensemble dénombrable ne présentant pas de point d'accumulation.