Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Fiche n° 2

Espace de probabilité

Ex 1. Description des espaces de probabilité
Décrire les espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans les situations suivantes :

1) On s'intéresse aux répartitions des sexes des enfants chez les familles de trois enfants *(l'enseignante d'IPE a trois enfants, quelle est la probabilité que ce soit une fille et deux garçons ?)*;

2) On tire 2 cartes au hasard d'un jeu de 52 cartes
– sans remise,
– avec remise;
(quelle est la probabilité de tirer deux as ?)

3) Une secrétaire un peu distraite répartit au hasard n lettres dans n enveloppes portant les adresses des n destinataires *(quelle est la probabilité qu'au moins une des lettres se trouvent dans la bonne enveloppe ?)*;

4) La secrétaire répartit les 40 étudiants du module IPE dans deux groupes, sans tenir compte du choix des étudiants :
– au hasard *(quelle est la probabilité que les deux groupes soient équilibrés ?)*
– en imposant des groupes équilibrés *(quelle est la probabilité que Amandine et Clément se retrouve dans le même groupe ?)*;

Vous pourrez répondre aux questions mises entre paranthèses (en décrivant au passage les événements dont vous calculez la probabilité comme sous-ensemble de Ω).

Ex 2. Temps d'attente de Pierre et Paul
Pierre et Paul ont rendez-vous entre 12h et 12h30. On discrétise le temps et on modélise cette situation par

$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}^2,$$

le tirage $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ représentant la situation où Pierre arrive ω_1 minutes aprés 12h et où Paul arrive ω_2 minutes aprés 12h. On munit Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité P.

1) Quelle est la probabilité de l'événement « Pierre et Paul arrivent en même temps » ?

2) Calculer la probabilité de l'événement « Pierre attend plus de 5 minutes » :

$$\{ \ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \ ; \ \omega_2 > \omega_1 + 5 \ \}.$$

Quelle est celle de l'événement « Pierre attend entre 5 et 15 minutes » (ces deux valeurs extrêmes étant exclues) ?

3) Quelle est la probabilité que Pierre et Paul arrivent avec k minutes de différence (pour $k \in \{0, \dots, 29\}$) ?

4) Quelle autre modélisation aurait-on pu choisir ? Est-ce que cela aurait changer les probabilités des événements considérés ?

Formule de Poincaré

Ex 3. Nombre de surjections
Soit n et k deux entiers strictement positifs. On répartit au hasard n jetons numérotés de 1 à n sur un tableau constitué de k cases numérotées de 1 à k. Chaque jeton est placé sur une case et chaque case peut recevoir plusieurs jetons.

1) Définir un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. Déterminer la probabilité que la i-ème case reste vide.

3) Déterminer la probabilité qu'au moins une case du tableau reste vide.

4) On désigne par $\Sigma_{n,k}$ l'ensemble des surjections de l'ensemble $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$ dans l'ensemble $\mathbb{N}_k = \{1, \dots, k\}$.
A quelle condition sur n et k, $\Sigma_{n,k}$ est-il non vide ? Sous cette condition, déduire de la question précédente une expression du cardinal de $\Sigma_{n,k}$ en fonction de n et k *(ce nombre est aussi appelé nombre de Stirling de seconde espèce)*. On le note $S_{n,k}$.

5) Montrer que $S_{n,1} = 1$, $S_{n,k} = 0$ si $k > n$ et pour tout entiers n et k,

$$S_{n,k} = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^{k}.$$

6) Donner une expression du nombre B_n de partitions d'un ensemble à n éléments *(B_n est appelé nombre de Bell)*. Donner les valeurs de B_n pour $n = 1, \dots, 4$.

Probabilité uniforme

Ex 4. Découpe de spagghetti
On découpe « au hasard » un segment de longueur v1 en trois morceaux. Quelle probabilité a-t-on de pouvoir former un triangle avec ces trois morceaux ?

Indépendance et conditionnement

Ex 5. Rappel
Pour chacune des assertions suivantes donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

1) Si A et B sont deux événements indépendants et incompatibles alors l'un des deux événements au moins est de probabilité nulle.

2) Si l'un des événements A ou B est de probabilité nulle alors A et B sont indépendants et incompatibles.

3) Si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C, alors il est indépendant de $B \cup C$.

4) Si un événement A est indépendant d'un événement B et si C est un événement tel que $C \subset B$ alors A est indépendant de C.

Ex 6. Une inégalité injustement méconnue
Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on note A un évènement quelconque et B un évènement tel que $0 < P(B) < 1$.

1) Montrez que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}\big|P(A \mid B) - P(A \mid B^c)\big|. \tag{1}$$

Indication : commencez par exprimer $P(A \mid B) - P(A \mid B^c)$ en fonction des seules probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$.

2) Que donne l'inégalité (1) lorsque $A \subset B$?

3) Dans quels cas (1) est-elle une égalité ?

Ex 7. Indépendance
Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité p dont la réunion soit l'espace Ω tout entier.

Ex 8. Loi de succession de Laplace
On dispose de $(N + 1)$ boîtes numérotées de 0 à N. La $k^{\text{ième}}$ boîte contient k boules rouges et $(N - k)$ boules blanches. On choisit une boîte au hasard et on fait, dans cette boîte, n tirages avec remise.

1) Sachant que le tirage est effectué dans la $k^{\text{ième}}$ boîte, quelle est la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge ?

2) Démontrer que la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge est :

$$\frac{1 + 2^n + 3^n + \cdots + N^n}{N^n(N + 1)}$$

et calculer sa limite quand N tend vers l'infini.

3) Calculer la probabilité $p_{N,n}$ de tirer une boule rouge la $(n+1)^{\text{ième}}$ fois, sachant qu'on vient de tirer n boules rouges de suite. Quelle est sa limite quand N tend vers l'infini ?

Ex 9. Un double temps d'attente *(deuxième partie)*
On rappelle le cadre de l'exercice. On dispose d'un dé bleu et d'un dé rouge *équilibrés* et on effectue une suite infinie de lancers de cette paire de dés. Pour un lancer nous pouvons modéliser cette expérience par l'ensemble $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ des couples à composantes dans $\{1, \dots, 6\}$, la première composante représentant le nombre indiqué par le dé bleu et la deuxième celui indiqué par le dé rouge. Pour représenter la suite infinie de lancers, nous utiliserons l'ensemble

$$\Omega := E^{\mathbb{N}^*} = \big\{(\omega_n)_{n\geq 1};\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n = (\omega_{n,1}, \omega_{n,2}) \in E\big\}$$

des suites infinies de couples éléments de E. Définissons les évènements suivants.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k est l'évènement « la première obtention du chiffre 2 avec le dé bleu a lieu lors du k^{e} lancer ».

- A' est l'évènement « le dé bleu ne donne jamais le chiffre 2 ».
- Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, B_ℓ est l'évènement « la première obtention du chiffre 3 ou du chiffre 6 avec le dé rouge a lieu lors du ℓ^{e} lancer ».
- B' est l'évènement « le dé rouge ne donne jamais le chiffre 3 ni le 6 »,
- E est l'évènement « le dé bleu finit par sortir un 2 et le dé rouge finit par sortir un multiple de 3 »,
- C est l'évènement « le dé bleu donne 2 pour la première fois avant que le rouge donne un 3 ou un 6 ».

Dans tout cet exercice, on n'essaiera pas d'expliciter la tribu $\mathcal{F}$ et la mesure de probabilité P telles que le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ soit une modélisation « correcte » de la suite infinie des lancers. On admettra l'existence d'un tel triplet et on se contentera de s'appuyer sur des hypothèses naturelles d'indépendance des lancers pour effectuer les calculs.

1) Calculez $P(A_k)$, $P(B_\ell)$ et $P(A_k \cap B_\ell)$, pour $k, \ell \in \mathbb{N}^*$.

2) Calculez $P\big(\underset{k\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_k\big)$ et en déduire que $P(A') = 0$. Que vaut $P(B')$?

3) Calculez $P(A' \cup B')$ et en déduire $P(E)$.

4) Calculez $P(C)$.

5) Expliquez pourquoi la famille $\{A_1, A_1^c \cap B_1, A_1^c \cap B_1^c\}$ constitue une partition de Ω et donnez *sans calcul* mais en expliquant votre choix les valeurs de $P(C \mid A_1)$, $P(C \mid A_1^c \cap B_1)$, $P(C \mid A_1^c \cap B_1^c)$. Retrouvez ainsi, sans calcul de série double, la valeur de $P(C)$.

Entraînement supplémentaire

Ex 10. Une probabilité sur $\mathbb{N}^2$

Soient a et b deux réels strictement compris entre 0 et 1 et g la fonction à valeurs positives définies sur $\mathbb{N}^2$ par : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ g(i,j) = ab(1-a)^i(1-b)^j$.

1) Vérifier que g permet de définir une probabilité notée P sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$. Rappeler l'expression de $P(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i+j = n\}$. Montrer que l'application f définie par, $f(n) = P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, caractérise une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ que l'on notera P_1. Calculer $P_1(\{n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Soient $B = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i = j\}$, $C = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i > j\}$ et $D = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i < j\}$. Calculer $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$.

4) Soit h l'application définie sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$ par :

$$h(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont pairs,} \\ -1 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont impairs,} \\ 0 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont de parité différente.} \end{cases}$$

On note hg l'application définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$hg(i,j) = h(i,j)g(i,j) \text{ pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

Démontrer que la famille $(hg(i,j))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Ex 11. Les menteurs

On considère n personnes. Chacune a probabilité p de mentir. On donne à la première personne une information sous la forme "*oui* ou *non*". La première personne transmet l'information à la seconde, qui la transmet à la troisième, etc, jusqu'à la n-ième qui l'annonce au monde.

1) Pour $1 \leq k \leq n$, on note V_k l'évènement "l'information que reçoit la k-ième personne est vraie", et on pose $p_k = P(V_k)$. Calculer p_1, p_2, et montrer que pour $k \geq 1$

$$p_{k+1} = p + p_k(1 - 2p).$$

2) Calculer la probabilité pour que l'information annoncée au monde soit vraie. (Indication : trouver une constante c telle que les $u_k = p_k - c$ forment une suite géométrique).

3) Quelle est la limite de cette probabilité lorsque le nombre n de personnes tend vers l'infini ? (Étudier en fonction de p)

Ex 12. Le gardien ivre

Un voleur se cache pour observer un veilleur de nuit ouvrir une porte. Il sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Celui-ci a un trousseau de 10 clés. Les soirs d'ivresse, il essaie une clé au hasard, la remet si elle n'ouvre pas la porte, et recommence, en essayant éventuellement plusieurs fois la même…Lorsqu'il est à jeun au contraire, il prend soin de séparer les clés déjà essayées.

La porte ayant été ouverte au huitième essai, le voleur en déduit que le veilleur de nuit est ivre et décide de tenter son coup. Quelle probabilité a-t-il de se tromper ? Que penser de la stratégie du voleur ?

Ex 13. Jeu de franc carreau

Sur une table plane un damier est peint. Il est carré, constitué de 100 cases, et chaque case est un carré de côté de longueur 2 cm. On jette sur ce damier un pion rond, de 1 cm de diamètre. On pourra modéliser cette épreuve aléatoire en considérant que le centre du pion suit une loi uniforme sur le damier.

1) Quelle est la probabilité que le pion recouvre l'un des « noeuds » du quadrillage ? On appelle noeud l'intersection de deux lignes du quadrillage.

2) Quelle est la probabilité que le pion tombe entièrement dans une case ?