Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Fiche n° 2

Espace de probabilité

Ex 1. Un peu de mécanique statistique
On considère un système de r particules pouvant être dans un des n niveaux d'énergie $e_1, \dots, e_n$. On définit l'espace des états du système comme l'ensemble des configurations distinguables. On fait l'hypothèse que chaque configuration distinguable est équiprobable. On considère les trois cas suivants :
(i) *Statistique de Maxwell-Boltzmann.* Les r particules sont localisées et donc distinguables.
(ii) *Statistique de Bose-Einstein.* Les r particules sont indistinguables.
(iii) *Statistique de Fermi-Dirac.* Les r particules sont indistinguables et il y a au plus une particule par niveau d'énergie (on suppose que $n \geq r$).

1) Construire l'espace de probabilité correspondant à chacun des modèles (i), (ii), (iii).

2) On note $p_{r,n}(k)$ la probabilité qu'un niveau d'énergie donné contienne exactement k particules. Calculer $p_{r,n}(k)$ dans chacun des trois cas (i), (ii) et (iii).

3) Pour chacun des trois modèles (i), (ii) et (iii), donner la limite p_k de $p_{r,n}(k)$ lorsque n et r tendent vers l'infini et que le nombre moyen r/n de particules par niveau d'énergie tend vers une quantité fixée $\lambda > 0$ (pour le cas (iii), on supposera que $\lambda \leq 1$).
Vérifier que l'on a toujours $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Ex 2. Nombre de surjections
Soit p et n deux entiers strictement positifs. On répartit au hasard p jetons numérotés de 1 à p sur un tableau constitué de n cases numérotés de 1 à n. Chaque jeton est placé sur une case et chaque case peut recevoir plusieurs jetons.

1) Définir un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Déterminer la probabilité que la i-ème case reste vide.

3) Déterminer la probabilité qu'au moins une case du tableau reste vide.

4) On désigne par $S_{p,n}$ l'ensemble des surjections de l'ensemble $\mathbb{N}_p = \{1, \dots, p\}$ dans l'ensemble $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$.
A quelle condition sur n et p, $S_{p,n}$ est-il non vide ? Sous cette condition, déduire de la question précédente une expression du cardinal de $S_{p,n}$ en fonction de n et p.

Ex 3. Une probabilité sur $\mathbb{N}^2$
Soient a et b deux réels strictement compris entre 0 et 1 et g la fonction à valeurs positives définies sur $\mathbb{N}^2$ par : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ g(i,j) = ab(1-a)^i(1-b)^j$.

1) Vérifier que g permet de définir une probabilité notée P sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$. Rappeler l'expression de $P(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i+j=n\}$. Montrer que l'application f définie par, $f(n) = P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, caractérise une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ que l'on notera P_1. Calculer $P_1(\{n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Soient $B = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i=j\}$, $C = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i > j\}$ et $D = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i < j\}$. Calculer $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$.

4) Soit h l'application définie sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$ par :

$$h(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont pairs,} \\ -1 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont impairs,} \\ 0 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont de parité différente.} \end{cases}$$

On note hg l'application définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$hg(i,j) = h(i,j)g(i,j) \text{ pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

Démontrer que la famille $(hg(i,j))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Ex 4. Tirer au hasard un nombre réel (suite)

On décide de « tirer au hasard » un réel $x \in [0,1[$. Pour cela on effectue — par la pensée ! — une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant des boules marquées chacune d'un chiffre décimal. On construit x en écrivant — toujours par la pensée — son développement décimal illimité, le numéro sorti au i^{e} tirage fournissant le i^{e} chiffre décimal de x. La composition précise de l'urne est inconnue. On sait seulement qu'il y a au moins une boule marquée 0, qu'il n'y a aucune boule marquée 9 et qu'il y a au moins une boule marquée d'un autre chiffre que 0. Comme aucune boule dans l'urne n'est marquée 9, le développement décimal illimité ainsi obtenu est forcément propre. On note p la probabilité de sortir une boule marquée 0 au i^{e} tirage. En raison du mode de tirage (une boule avec remise) et de la composition de l'urne, il est clair que p ne dépend pas de i et que $0 < p < 1$.

Pour chaque i de $\mathbb{N}^*$ on note N_i l'événement :

$$N_i := \{\text{le } i^{\text{e}} \text{ chiffre de } x \text{ après la virgule est un zéro}\}$$

Les $(N_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants et tous de probabilité p.

Et on rappelle les événements suivants :

$D_n := \{$l'écriture décimale illimitée de x ne comporte que des zéros à partir du rang $n\}$,
$D := \{x$ est un nombre décimal $\}$,
$E := \{$l'écriture de x comporte une infinité de zéros$\}$.

1) Donner $P(\{x < 10^{-4}\})$. Les N_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

2) Calculer la probabilité de l'évènement

$$F_n := \{\text{le premier chiffre non-nul après la virgule est au rang } n\}.$$

Les F_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

3) Écrire $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} N_i^c$ à l'aide des F_n et calculer sa probabilité. En déduire $P(\{x=0\})$.

4) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer la valeur de $P(D_m)$. On pourra utiliser la monotonie de la suite $(G_n)_{n\geq m}$ où $G_n := \bigcap\limits_{i=m}^{n} N_i$.

5) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal avec ce type de tirage aléatoire ?

6) Reprendre la question précédente avec une urne dans laquelle on a rajouté une boule numerotée 9.

Ex 5. Jeu de franc carreau
Sur une table plane un damier est peint. Il est carré, constitué de 100 cases, et chaque case est un carré de côté de longueur 2 cm. On jette sur ce damier un pion rond, de 1 cm de diamètre. On pourra modéliser cette épreuve aléatoire en considérant que le centre du pion suit une loi uniforme sur le damier.

1) Quelle est la probabilité que le pion recouvre l'un des « noeuds » du quadrillage ? On appelle noeud l'intersection de deux lignes du quadrillage.

2) Quelle est la probabilité que le pion tombe entièrement dans une case ?

Ex 6. Déchargement de bateaux
Deux bateaux A et B arrivent dans un port la même journée. Un évènement élémentaire est un couple (ω_1, ω_2) où ω_1 représente l'heure d'arrivée du bateau A et ω_2 l'heure d'arrivée du bateau B. On modélise ceci par $\Omega = [0, 24]^2$ muni de la tribu borélienne $\mathrm{Bor}([0, 24]^2)$ (c'est-à-dire la tribu engendrée par les ensembles ouverts de $[0, 24]^2$). On admettra que tout domaine de $[0, 24]^2$ dont la frontière est un polygone convexe est un élément de $\mathrm{Bor}([0, 24]^2)$. On définit alors la probabilité uniforme P sur $[0, 24]^2$ par

$$P(B) = \frac{\lambda_2(B)}{\lambda_2([0, 24]^2)} \quad , \quad \forall B \in \mathrm{Bor}([0, 24]^2),$$

où λ_2 est la restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ à $\mathrm{Bor}([0, 24]^2)$ (on rappelle que λ_2 généralise la notion d'aire).

Le bateau A met quatre heures à décharger tandis que le bateau B met deux heures à décharger. Si un bateau arrive alors que l'autre est en cours de déchargement, il doit attendre que cette opération soit finie pour que son déchargement commence.

On considère les quatres évènements suivants :
- E_1 = "A arrive avant B et B n'attend pas pour être déchargé",
- E_2 = "B arrive avant A et A n'attend pas pour être déchargé",
- F_1 = "A arrive avant B et B attend pour être déchargé",
- F_2 = "B arrive avant A et A attend pour être déchargé".

1) Calculer la probabilité des évènements E_1, E_2, F_1 et F_2.

2) Calculer la probabilité que A soit arrivé avant B sachant qu'aucun bateau n'a attendu pour être déchargé.

Indépendance et conditionnement

Ex 7. Pour chacune des assertions suivantes donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

1) Si A et B sont deux événements indépendants et incompatibles alors l'un des deux événements au moins est de probabilité nulle.

2) Si l'un des événements A ou B est de probabilité nulle alors A et B sont indépendants et incompatibles.

3) Si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C, alors il est indépendant de $B \cup C$.

4) Si un événement A est indépendant d'un événement B et si C est un événement tel que $C \subset B$ alors A est indépendant de C.

Ex 8. Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité p dont la réunion soit l'espace Ω tout entier.

Ex 9. Le gardien ivre

Un voleur se cache pour observer un veilleur de nuit ouvrir une porte. Il sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Celui-ci a un trousseau de 10 clés. Les soirs d'ivresse, il essaie une clé au hasard, la remet si elle n'ouvre pas la porte, et recommence, en essayant éventuellement plusieurs fois la même. . .Lorsqu'il est à jeun au contraire, il prend soin de séparer les clés déjà essayées.

La porte ayant été ouverte au huitième essai, le voleur en déduit que le veilleur de nuit est ivre et décide de tenter son coup. Quelle probabilité a-t-il de se tromper ? Que penser de la stratégie du voleur ?

Ex 10. Les menteurs

On considère n personnes. Chacune a probabilité p de mentir. On donne à la première personne une information sous la forme "*oui* ou *non*". La première personne transmet l'information à la seconde, qui la transmet à la troisième, etc, jusqu'à la n-ième qui l'annonce au monde.

1) Pour $1 \leq k \leq n$, on note V_k l'évènement "l'information que reçoit la k-ième personne est vraie", et on pose $p_k = P(V_k)$. Calculer p_1, p_2, et montrer que pour $k \geq 1$

$$p_{k+1} = p + p_k(1 - 2p).$$

2) Calculer la probabilité pour que l'information annoncée au monde soit vraie. (Indication : trouver une constante c telle que les $u_k = p_k - c$ forment une suite géométrique).

3) Quelle est la limite de cette probabilité lorsque le nombre n de personnes tend vers l'infini ? (Étudier en fonction de p)

Entraînement supplémentaire

Ex 11. Une inégalité injustement méconnue

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on note A un évènement quelconque et B un évènement tel que $0 < P(B) < 1$.

1) Montrez que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}\big|P(A \mid B) - P(A \mid B^c)\big|. \qquad (2)$$

Indication : commencez par exprimer $P(A \mid B) - P(A \mid B^c)$ en fonction des seules probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$.

2) Que donne l'inégalité (2) lorsque $A \subset B$?

3) Dans quels cas (2) est-elle une égalité ?

Ex 12. Jeu de dés

Deux personnes Emilie et Denis jouent au jeu de dés

1) Emilie commence la partie et lance son dé. Elle gagne la partie si son adversaire obtient, en lançant à son tour le dé, un nombre plus petit ou égal au sien. Déterminer la probabilité p que Emilie gagne cette partie.

2) Emilie et Denis font plusieurs parties de ce type de la manière suivante. C'est Emilie qui commence la première partie. Si elle gagne, elle commence la deuxième partie sinon c'est Denis. Et ainsi de suite : le joueur qui gagne une partie donnée commence la partie suivante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'événement "Emilie gagne la n-ème partie" et on note $u_n = P(E_n)$.

3) Donner la valeur de u_1.

4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence :

$$u_n = (2p-1)u_{n-1} + 1 - p \quad (n \geq 2),$$

p étant la valeur trouvé en 1).

5) Pour résoudre cette relation de récurrence, on cherche une constante a telle que la nouvelle suite $v_n = u_n - a$ définisse une suite géométrique. Quelle valeur de a convient ? Exprimer alors v_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de p, de n et de v_1.

6) En déduire la valeur de u_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de p et de n. Comment se comporte u_n quand n tends vers $+\infty$? Commenter.

Ex 13. Loi de succession de Laplace

On dispose de $(N+1)$ boîtes numérotées de 0 à N. La $k^{\text{ième}}$ boîte contient k boules rouges et $(N-k)$ boules blanches. On choisit une boîte au hasard et on fait, dans cette boîte, n tirages avec remise.

1) Sachant que le tirage est effectué dans la $k^{\text{ième}}$ boîte, quelle est la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge ?

2) Démontrer que la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge est :

$$\frac{1 + 2^n + 3^n + \cdots + N^n}{N^n(N+1)}$$

et calculer sa limite quand N tend vers l'infini.

3) Calculer la probabilité $p_{N,n}$ de tirer une boule rouge la $(n+1)^{\text{ième}}$ fois, sachant qu'on vient de tirer n boules rouges de suite. Quelle est sa limite quand N tend vers l'infini ?