Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2007-2008**

Fiche n° 2

Ex 1. Secrétariat

Une secrétaire un peu distraite a tapé N lettres et préparé N enveloppes portant les adresses des destinataires, mais elle répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour $1 \leq j \leq N$, on note A_j l'événement *la j-ème lettre se trouve dans la bonne enveloppe.*

1) Définir un espace de probabilité $(\Omega_N, \mathcal{P}(\Omega_N), P_N)$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Calculer $P_N(A_j)$.

3) On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ entre 1 et N. Dénombrer toutes les permutations σ sur $\{1, \ldots, N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1$, $\sigma(i_2) = i_2$, $\ldots$, $\sigma(i_k) = i_k$. En déduire $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

4) On note B l'événement *au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe.* Exprimer B à l'aide des A_j.

5) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $P_N(B)$ et sa limite quand N tend vers l'infini.

Ex 2. On permute au hasard les chiffres 1, 2, 3, 4. On considère les événements :

A : « 1 est avant 2 »,
B : « 3 est avant 4 ».

1) Calculer $P(A)$.

2) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3) On permute maintenant au hasard les entiers de 1 à 10, et les événements A et B sont toujours définis comme ci-dessus. Même question.

Ex 3. Une inégalité injustement méconnue

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on note A un évènement quelconque et B un évènement tel que $0 < P(B) < 1$.

1) Montrez que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}\big|P(A \mid B) - P(A \mid B^c)\big|. \tag{1}$$

Indication : commencez par exprimer $P(A \mid B) - P(A \mid B^c)$ en fonction des seules probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$.

2) Que donne l'inégalité (1) lorsque $A \subset B$?

3) Dans quels cas (1) est-elle une égalité ?

Ex 4. Jeu de dés

1) Deux personnes Emilie et Denis jouent au jeu de dés suivant : Emilie, qui commence la partie, lance son dé. Elle gagne la partie si son adversaire obtient, en lançant à son tour le dé, un nombre plus petit ou égal au sien. Déterminer la probabilité p que Emilie gagne cette partie.

2) Emilie et Denis font plusieurs parties de ce type de la manière suivante. C'est Emilie qui commence la première partie. Si elle gagne, elle commence la deuxième partie sinon c'est Denis. Et ainsi de suite : le joueur qui gagne une partie donnée commence la partie suivante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'événement "Emilie gagne la n-ème partie" et on note $u_n = P(E_n)$.

3) Donner la valeur de u_1.

4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence :

$$u_n = (2p-1)u_{n-1} + 1 - p \quad (n \geq 2),$$

p étant la valeur trouvé en 1).

5) Pour résoudre cette relation de récurrence, on cherche une constante a telle que la nouvelle suite $v_n = u_n - a$ définisse une suite géométrique. Quelle valeur de a convient ? Exprimer alors v_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de p, de n et de v_1.

6) En déduire la valeur de u_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de p et de n. Comment se comporte u_n quand n tends vers $+\infty$? Commenter.

Ex 5. Déchargement de bateaux

Deux bateaux A et B arrivent dans un port la même journée. Un évènement élémentaire est un couple (ω_1, ω_2) où ω_1 représente l'heure d'arrivée du bateau A et ω_2 l'heure d'arrivée du bateau B. On modélise ceci par $\Omega = [0, 24]^2$ muni de la tribu borélienne $\mathrm{Bor}([0, 24]^2)$ (c'est-à-dire la tribu engendrée par les ensembles ouverts de $[0, 24]^2$). On admettra que tout domaine de $[0, 24]^2$ dont la frontière est un polygone convexe est un élément de $\mathrm{Bor}([0, 24]^2)$. On définit alors la probabilité uniforme P sur $[0, 24]^2$ par

$$P(B) = \frac{\lambda_2(B)}{\lambda_2([0, 24]^2)} \quad , \quad \forall B \in \mathrm{Bor}([0, 24]^2),$$

où λ_2 est la restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ à $\mathrm{Bor}([0, 24]^2)$ (on rappelle que λ_2 généralise la notion d'aire).

Le bateau A met quatre heures à décharger tandis que le bateau B met deux heures à décharger. Si un bateau arrive alors que l'autre est en cours de déchargement, il doit attendre que cette opération soit finie pour que son déchargement commence.

On considère les quatres évènements suivants :

- E_1 = "A arrive avant B et B n'attend pas pour être déchargé",
- E_2 = "B arrive avant A et A n'attend pas pour être déchargé",

– F_1 = "A arrive avant B et B attend pour être déchargé",
– F_2 = "B arrive avant A et A attend pour être déchargé".

1) Calculer la probabilité des évènements E_1, E_2, F_1 et F_2.

2) Calculer la probabilité que A soit arrivé avant B sachant qu'aucun bateau n'a attendu pour être déchargé.

Ex 6. Bonne résolution
Un buveur impénitent décide d'essayer de ne plus boire. On admet que s'il ne boit pas un jour donné alors il y a une probabilité $0,4$ qu'il ne boive pas le lendemain. Tandis que s'il a succombé à la tentation un jour, il ne boira le lendemain par remords qu'avec une probabilité $0,2$. On note p_1 la probabilité qu'il ne boive pas le premier jour. On cherche à calculer en fonction de p_1 et de n la probabilité p_n de l'événement

$$A_n = \{\text{Le buveur ne boit pas le } n\text{-ième jour}\}.$$

1) Donner sans calcul les valeurs des probabilités conditionnelles $P(A_n \mid A_{n-1})$ et $P(A_n \mid A_{n-1}^c)$.

2) En appliquant la formule des probabilités totales, en déduire que la suite (p_n) vérifie la relation de récurrence :

$$p_n = -0,4p_{n-1} + 0,8 \qquad (n \geq 2). \tag{2}$$

3) Pour résoudre la relation de récurrence (2), on cherche une constante a telle que la nouvelle suite $q_n = p_n + a$ soit une suite géométrique. Quelle valeur de a convient ? Exprimer alors q_n en fonction de q_1 et de n.

4) En déduire la valeur de p_n en fonction de p_1 et de n. Montrer que p_n converge quand n tend vers l'infini vers une limite p qui ne dépend pas de p_1. Majorer l'erreur commise en remplaçant p_n par p pour $n \geq 7$.

Entraînement supplémentaire

Ex 7. On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille de n enfants. On suppose que les sexes des enfants sont indépendants les uns des autres et que chaque enfant a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être un garçon. On considère les évènements :

$$A = \{\text{la famille a des enfants des deux sexes}\} \quad B = \{\text{la famille a au plus une fille}\}.$$

1) Montrer que pour $n \geq 2$, $P(A) = (2^n - 2)/2^n$ et $P(B) = (n+1)/2^n$.

2) En déduire que A et B ne sont indépendants que si $n = 3$.

Ex 8. On dispose de $(N+1)$ boîtes numérotées de 0 à N. La $k^{\text{ième}}$ boîte contient k boules rouges et $(N-k)$ boules blanches. On choisit une boîte au hasard et on fait, dans cette boîte, n tirages avec remise.

1) Sachant que le tirage est effectué dans la $k^{\text{ième}}$ boîte, quelle est la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge ?

2) Démontrer que la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge est :

$$\frac{1 + 2^n + 3^n + \cdots + N^n}{N^n(N+1)}$$

et calculer sa limite quand N tend vers l'infini.

3) Calculer la probabilité $p_{N,n}$ de tirer une boule rouge la $(n+1)^{\text{ième}}$ fois, sachant qu'on vient de tirer n boules rouges de suite. Quelle est sa limite quand N tend vers l'infini ?

Ex 9. Jeu de franc carreau

Sur une table plane un damier est peint. Il est carré, constitué de 100 cases, et chaque case est un carré de côté de longueur 2 cm. On jette sur ce damier un pion rond, de 1 cm de diamètre.

1) Quelle est la probabilité que le pion recouvre l'un des « noeuds » du quadrillage ? On appelle noeud l'intersection de deux lignes du quadrillage.

2) Quelle est la probabilité que le pion tombe entièrement dans une case ?
On pourra modéliser cette épreuve aléatoire en considérant que le centre du pion suit une loi uniforme sur le damier.

Ex 10. Soit p et n deux entiers strictement positifs. On répartit au hasard p jetons numérotés de 1 à p sur un tableau constitué de n cases numérotés de 1 à n. Chaque jeton est placé sur une case et chaque case peut recevoir plusieurs jetons.

1) Définir un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Déterminer la probabilité que la i-ème case reste vide.

3) Déterminer la probabilité qu'au moins une case du tableau reste vide.

4) On désigne par $S_{p,n}$ l'ensemble des surjections de l'ensemble $\mathbb{N}_p = \{1, \ldots, p\}$ dans l'ensemble $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$.
A quelle condition sur n et p, $S_{p,n}$ est-il non vide ? Sous cette condition, déduire de la question précédente une expression du cardinal de $S_{p,n}$ en fonction de n et p.