Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Fiche n° 2

Ex 1. Secrétariat

Une secrétaire un peu distraite a tapé N lettres et préparé N enveloppes portant les adresses des destinataires, mais elle répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour $1 \leq j \leq N$, on note A_j l'événement *la j-ème lettre se trouve dans la bonne enveloppe.*

1) Définir un espace de probabilité $(\Omega_N, \mathcal{P}(\Omega_N), P_N)$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Calculer $P_N(A_j)$.

3) On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ entre 1 et N. Dénombrer toutes les permutations σ sur $\{1, \ldots, N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1$, $\sigma(i_2) = i_2$, $\ldots$, $\sigma(i_k) = i_k$. En déduire $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

4) On note B l'événement *au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe.* Exprimer B à l'aide des A_j.

5) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $P_N(B)$ et sa limite quand N tend vers l'infini.

Correction . Cet exercice nécessitait l'utilisation de la formule de Poincaré permettant d'exprimer la probabilité d'une réunion de n évènements à l'aide de probabilités d'intersections. Selon cette formule, pour tout $n \geq 2$ et toute famille $A_1, \ldots, A_n$ d'événements :

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \Big) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned}$$

1) On choisit comme ensemble Ω_N des événements élémentaires, l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, N\}$ correspondant à la permutation des lettres : si $\sigma \in \Omega_N$, alors $\sigma(i) = j$ représente par exemple l'événement : « la lettre numérotée j est placée dans l'enveloppe numérotée i » .

L'espace étant fini, on prend l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega_N)$ des parties de Ω_N comme tribu des événements observables.

Enfin, on munit $(\Omega_N, \mathcal{P}(\Omega_N))$ de l'équiprobabilité : pour tout $\sigma \in \Omega_N$, $P(\{\sigma\}) = 1/N!$ (puisque $\text{Card}(\Omega_N) = N!$).

2) L'événement A_j peut s'écrire :

$$A_j = \{\sigma \in \Omega_N \, , \; \sigma(j) = j\} \, .$$

Donc, sa probabilité est donnée par :

$$P_N(A_j) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}.$$

3) On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. L'événement $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble des permutations qui *laissent fixes* les k éléments i_1, i_2,..., i_k. Il y en a exactement autant que de permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, N\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ soit $(N-k)!$. Bien sûr on a compté dans ces permutations toutes celles qui laissent fixes d'autres éléments en plus de $i_1, \ldots, i_k$. La probabilité que chacune des k lettres $i_1, \ldots, i_k$ se trouve dans la bonne enveloppe est donc

$$P_N(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(N-k)!}{N!}.$$

Notons que ce calcul reste valable dans le cas $k = 1$ et on retrouve dans ce cas que pour tout j, $P_N(A_j) = 1/N$.

4) L'événement B s'écrit $B = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$.

5) En appliquant la formule de Poincaré à l'union $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$, on peut écrire

$$\begin{aligned} P_N\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_j \Big) &= \sum_{j=1}^{N} P_N(A_j) + \sum_{k=2}^{N} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le N} P_N(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j+1}}{j!}. \end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du fait qu'il y a C_N^k façons de fixer ainsi k lettres $i_1 < \ldots < i_k$ se trouvant dans la bonne enveloppe (autant que de parties à k éléments dans $\{1, \ldots, N\}$, car une fois choisie une telle partie, il n'y a qu'une seule façon de la ranger dans l'ordre croissant) et donc

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le N} P_N(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}) = C_N^k \times \frac{(N-k)!}{N!} = \frac{1}{k!}.$$

On rappelle que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est développable en série entière avec rayon de convergence infini et que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}. \tag{1}$$

En particulier,

$$P_N(B) = 1 - \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}$$

converge vers $1 - \mathrm{e}^{-1}$ quand N tend vers l'infini.

Ex 2. On permute au hasard les chiffres 1, 2, 3, 4. On considère les événements :

A : « 1 est avant 2 »,

B : « 3 est avant 4 ».

1) Calculer $P(A)$.

2) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3) On permute maintenant au hasard les entiers de 1 à 10, et les événements A et B sont toujours définis comme ci-dessus. Même question.

Correction .

1) $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

2) A et B sont indépendants.

3) Les résultats ne sont pas modifiés.

Ex 3. Une inégalité injustement méconnue

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on note A un évènement quelconque et B un évènement tel que $0 < P(B) < 1$.

1) Montrez que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}\bigl|P(A \mid B) - P(A \mid B^c)\bigr|. \tag{2}$$

Indication : commencez par exprimer $P(A \mid B) - P(A \mid B^c)$ en fonction des seules probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$.

2) Que donne l'inégalité (2) lorsque $A \subset B$?

3) Dans quels cas (2) est-elle une égalité ?

Ex 4. Jeu de dés

1) Deux personnes Emilie et Denis jouent au jeu de dés suivant : Emilie, qui commence la partie, lance son dé. Elle gagne la partie si son adversaire obtient, en lançant à son tour le dé, un nombre plus petit ou égal au sien. Déterminer la probabilité p que Emilie gagne cette partie.

2) Emilie et Denis font plusieurs parties de ce type de la manière suivante. C'est Emilie qui commence la première partie. Si elle gagne, elle commence la deuxième partie sinon c'est Denis. Et ainsi de suite : le joueur qui gagne une partie donnée commence la partie suivante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'événement "Emilie gagne la n-ème partie" et on note $u_n = P(E_n)$.

3) Donner la valeur de u_1.

4) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence :

$$u_n = (2p - 1)u_{n-1} + 1 - p \quad (n \geq 2),$$

p étant la valeur trouvé en 1).

5) Pour résoudre cette relation de récurrence, on cherche une constante a telle que la nouvelle suite $v_n = u_n - a$ définisse une suite géométrique. Quelle valeur de a convient ? Exprimer alors v_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de p, de n et de v_1.

6) En déduire la valeur de u_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de p et de n. Comment se comporte u_n quand n tends vers $+\infty$? Commenter.

Correction .

1) Pendant une partie, si x_1 désigne le résultat du lancer d'Emilie et x_2 le résultat du lancer de Denis, le couple (x_1, x_2) décrit le résultat d'une partie. On pose $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ l'ensemble des résultats possibles et on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme P_1 : pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\omega) = \frac{1}{36}$. Soit A l'événement « Emilie gagne la partie ». Alors $A = \{(x_1, x_2) \in \{1, \ldots, 6\}^2, \text{ tel que } x_1 \geq x_2\}$. Donc, $p = P_1(A) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{36} = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{36} = \frac{21}{36}$. La probabilité que Emilie gagne la partie est donc $p = \frac{7}{12}$.

2) $u_1 = p$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, décomposons E_n en utilisant l'événement E_{n-1}.

$$\begin{aligned} u_n &= P(E_n \cap E_{n-1}) + P(E_n \cap E_{n-1}^c) \\ &= P_n(E_n | E_{n-1}) P(E_{n-1}) + P(E_n | E_{n-1}^c) P(E_{n-1}^c) \\ &= p u_{n-1} + (1-p)(1-u_{n-1}) \end{aligned}$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (2p-1)u_{n-1} + 1 - p$. La suite définie par $v_n = u_n - 1/2$ vérifie $v_n = (2p-1)v_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, $v_n = (2p-1)^{n-1} v_1$ et $u_n = (u_1 - 1/2)(2p-1)^{n-1} + 1/2$ avec $u_1 = p$. Par conséquent, $u_n = 1/2((2p-1)^n + 1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est un nombre plus grand que $1/2$ et qui décroit vers $1/2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc, celui qui commence la première partie a toujours plus de chance de gagner les différentes parties qui suivent que l'autre joueur, mais cet avantage diminue lorsque n croit.

Ex 5. Déchargement de bateaux Deux bateaux A et B arrivent dans un port la même journée. Un évènement élémentaire est un couple (ω_1, ω_2) où ω_1 représente l'heure d'arrivée du bateau A et ω_2 l'heure d'arrivée du bateau B. On modélise ceci par $\Omega = [0, 24]^2$ muni de la tribu borélienne $\mathrm{Bor}([0, 24]^2)$ (c'est-à-dire la tribu engendrée par les ensembles ouverts de $[0, 24]^2$). On admettra que tout domaine de $[0, 24]^2$ dont la frontière est un polygone convexe est un élément de $\mathrm{Bor}([0, 24]^2)$. On définit alors la probabilité uniforme P sur $[0, 24]^2$ par

$$P(B) = \frac{\lambda_2(B)}{\lambda_2([0, 24]^2)} \quad , \quad \forall B \in \mathrm{Bor}([0, 24]^2),$$

où λ_2 est la restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ à $\mathrm{Bor}([0, 24]^2)$ (on rappelle que λ_2 généralise la notion d'aire).

Le bateau A met quatre heures à décharger tandis que le bateau B met deux heures à décharger. Si un bateau arrive alors que l'autre est en cours de déchargement, il doit attendre que cette opération soit finie pour que son déchargement commence.

On considère les quatres évènements suivants :

- E_1 = "A arrive avant B et B n'attend pas pour être déchargé",
- E_2 = "B arrive avant A et A n'attend pas pour être déchargé",
- F_1 = "A arrive avant B et B attend pour être déchargé",
- F_2 = "B arrive avant A et A attend pour être déchargé".

1) Calculer la probabilité des évènements E_1, E_2, F_1 et F_2.

2) Calculer la probabilité que A soit arrivé avant B sachant qu'aucun bateau n'a attendu pour être déchargé.

Correction .

1) Calculer la probabilité des évènements E_1, E_2, F_1 et F_2.

Les événements E_1, E_2, F_1 et F_2 sont représentés de la manière suivante (cf figure 1) :

- $E_1 = \{(\omega_1, \omega_2) \in [0, 24]^2\,;\ \omega_2 > \omega_1 + 4\}$,
- $E_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \in [0, 24]^2\,;\ \omega_1 > \omega_2 + 2\}$,
- $F_1 = \{(\omega_1, \omega_2) \in [0, 24]^2\,;\ \omega_1 < \omega_2 < \omega_1 + 4\}$,
- $F_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \in [0, 24]^2\,;\ \omega_2 < \omega_1 < \omega_2 + 2\}$.

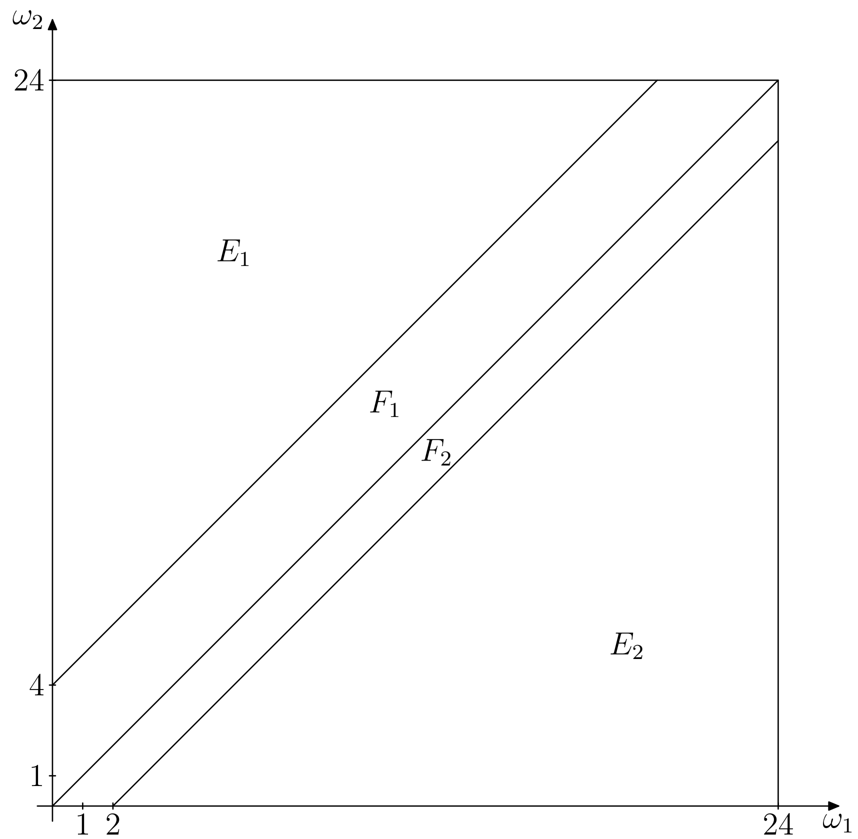

FIG. 1 – Les évènements E_1, E_2, F_1 et F_2

L'aire du triangle E_1 est $\dfrac{20^2}{2}$ et donc

$$P(E_1) = \frac{20^2}{2.24^2} = \frac{25}{72} \simeq 0,347.$$

L'aire du triangle E_2 est $\dfrac{22^2}{2}$ et donc

$$P(E_2) = \frac{22^2}{2.24^2} = \frac{121}{288} \simeq 0,420.$$

Pour calculer $P(F_1)$ sans faire trop de calcul, on peut utiliser le fait que

$$E_1 \cup F_1 = \left\{(\omega_1, \omega_2) \in [0,24]^2\,;\ \omega_2 > \omega_1\right\},$$

qui est de probabilité $\frac{1}{2}$. Et, comme E_1 et F_1 sont disjoints, on conclut que

$$P(F_1) = \frac{1}{2} - P(E_1) = \frac{11}{72} \simeq 0,153.$$

On pouvait aussi obtenir $P(F_1)$ en calculant l'aire du trapèze formé par F_1.
De la même manière, on calcule $P(F_2)$ en utilisant

$$E_2 \cup F_2 = \left\{(\omega_1, \omega_2) \in [0,24]^2\,;\ \omega_2 < \omega_1\right\},$$

qui est de probabilité $\frac{1}{2}$. Et, comme E_2 et F_2 sont disjoints, on conclut que

$$P(F_2) = \frac{1}{2} - P(E_2) = \frac{23}{288} \simeq 0,080,$$

(un calcul d'aire conduirait au même résultat).

2) L'évènement « aucun bateau n'a attendu pour être déchargé » est $E_1 \cup E_2$ et l'évènement « A arrive avant B » est $E_1 \cup F_1$ La probabilité que A soit arrivé avant B sachant qu'aucun bateau n'a attendu pour être déchargé est donc $P(E_1 \cup F_1 \,|E_1 \cup E_2)$.

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup F_1 \,|E_1 \cup E_2) &= P(E_1 \,|E_1 \cup E_2) + P(F_1 \,|E_1 \cup E_2) \\ &= P(E_1 \,|E_1 \cup E_2) \\ &= \frac{P(E_1)}{P(E_1) + P(E_2)} \\ &= \frac{100}{221} = 0,452. \end{aligned}$$

La première égalité est justifiée par le fait que E_1 et F_1 sont disjoints. La deuxième égalité est justifiée par $P(F_1 \,|E_1 \cup E_2) = 0$ puisque $F_1 \cap (E_1 \cup E_2) = \varnothing$. Et pour la troisième inégalité, on utilise que E_1 et E_2 sont disjoints.

Entraînement supplémentaire

Ex 6. On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille de n enfants. On suppose que les sexes des enfants sont indépendants les uns des autres et que chaque enfant a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être un garçon. On considère les évènements :

$$A = \{\text{la famille a des enfants des deux sexes}\} \quad B = \{\text{la famille a au plus une fille}\}.$$

1) Montrer que pour $n \geq 2$, $P(A) = (2^n - 2)/2^n$ et $P(B) = (n+1)/2^n$.

2) En déduire que A et B ne sont indépendants que si $n = 3$.

Ex 7. On dispose de $(N + 1)$ boîtes numérotées de 0 à N. La $k^{\text{ième}}$ boîte contient k boules rouges et $(N - k)$ boules blanches. On choisit une boîte au hasard et on fait, dans cette boîte, n tirages avec remise.

1) Sachant que le tirage est effectué dans la $k^{\text{ième}}$ boîte, quelle est la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge ?

2) Démontrer que la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge est :

$$\frac{1 + 2^n + 3^n + \cdots + N^n}{N^n(N + 1)}$$

et calculer sa limite quand N tend vers l'infini.

3) Calculer la probabilité $p_{N,n}$ de tirer une boule rouge la $(n + 1)^{\text{ième}}$ fois, sachant qu'on vient de tirer n boules rouges de suite. Quelle est sa limite quand N tend vers l'infini ?

Ex 8. Jeu de franc carreau

Sur une table plane un damier est peint. Il est carré, constitué de 100 cases, et chaque case est un carré de côté de longueur 2 cm. On jette sur ce damier un pion rond, de 1 cm de diamètre.

1) Quelle est la probabilité que le pion recouvre l'un des « noeuds » du quadrillage ? On appelle noeud l'intersection de deux lignes du quadrillage.

2) Quelle est la probabilité que le pion tombe entièrement dans une case ?
On pourra modéliser cette épreuve aléatoire en considérant que le centre du pion suit une loi uniforme sur le damier.

Ex 9. Nombre de surjections

Soit p et n deux entiers strictement positifs. On répartit au hasard p jetons numérotés de 1 à p sur un tableau constitué de n cases numérotés de 1 à n. Chaque jeton est placé sur une case et chaque case peut recevoir plusieurs jetons.

1) Définir un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Déterminer la probabilité que la i-ème case reste vide.

3) Déterminer la probabilité qu'au moins une case du tableau reste vide.

4) On désigne par $S_{p,n}$ l'ensemble des surjections de l'ensemble $\mathbb{N}_p = \{1, \ldots, p\}$ dans l'ensemble $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$.
A quelle condition sur n et p, $S_{p,n}$ est-il non vide ? Sous cette condition, déduire de la question précédente une expression du cardinal de $S_{p,n}$ en fonction de n et p.