Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE **Année 2004-2005**

Fiche n° 2

Ex 1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements ayant chacun une probabilité 1 (on rappelle que $P(A_n) = 1$ n'implique pas $A_n = \Omega$). On note A leur intersection. Que peut-on dire de $P(A)$?

Ex 2. Pour chacune des assertions suivantes donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

1) Si A et B sont deux événements indépendants et incompatibles alors l'un des deux événements au moins est de probabilité nulle.

2) Si l'un des événements A ou B est de probabilité nulle alors A et B sont indépendants et incompatibles.

3) Si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C, alors il est indépendant de $B \cup C$.

Ex 3. On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille de n enfants. On prend comme modélisation

$$\Omega_n = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}^n = \{\, (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}, i = 1, \ldots, n\},$$

muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega_n)$ et de la probabilité uniforme. On considère les évènements :

$$A = \{\text{la famille a des enfants des deux sexes}\} \quad B = \{\text{la famille a au plus une fille}\}.$$

1) Montrer que pour $n \geq 2$, $P(A) = (2^n - 2)/2^n$ et $P(B) = (n + 1)/2^n$.

2) En déduire que A et B ne sont indépendants que si $n = 3$.

Ex 4. On permute au hasard les chiffres 1,2,3,4. On considère les événements :
A : « 1 est avant 2 »,
B : « 3 est avant 4 ».

1) Calculer $P(A)$.

2) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3) On permute maintenant au hasard les entiers de 1 à 10, et les événements A et B sont toujours définis comme ci-dessus. Mê

Ex 5. Bonne résolution
Un buveur impénitent décide d'essayer de ne plus boire. On admet que s'il ne boit pas un jour donné alors il y a une probabilité $0,4$ qu'il ne boive pas le lendemain. Tandis que s'il a succombé à la tentation un jour, il ne boira le lendemain par remords qu'avec une probabilité $0,2$. On note p_1 la probabilité qu'il ne boive pas le premier jour. On cherche à calculer en fonction de p_1 et de n la probabilité p_n de l'événement

$$A_n = \{\text{Le buveur ne boit pas le } n\text{-ième jour}\}.$$

1) Donner sans calcul les valeurs des probabilités conditionnelles $P(A_n \mid A_{n-1})$ et $P(A_n \mid A_{n-1}^c)$.

2) En appliquant la formule des probabilités totales, en déduire que la suite (p_n) vérifie la relation de récurrence :

$$p_n = -0,4p_{n-1} + 0,8 \qquad (n \geq 2). \tag{1}$$

3) Pour résoudre la relation de récurrence (1), on cherche une constante a telle que la nouvelle suite $q_n = p_n + a$ soit une suite géométrique. Quelle valeur de a convient ? Exprimer alors q_n en fonction de q_1 et de n.

4) En déduire la valeur de p_n en fonction de p_1 et de n. Montrer que p_n converge quand n tend vers l'infini vers une limite p qui ne dépend pas de p_1. Majorer l'erreur commise en remplaçant p_n par p pour $n \geq 7$.

Ex 6. On dispose de $(N + 1)$ boîtes numérotées de 0 à N. La $k^{\text{ième}}$ boîte contient k boules rouges et $(N - k)$ boules blanches. On choisit une boîte au hasard et on fait, dans cette boîte, n tirages avec remise.

1) Sachant que le tirage est effectué dans la $k^{\text{ième}}$ boîte, quelle est la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge ?

2) Démontrer que la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge est :

$$\frac{1 + 2^n + 3^n + \cdots + N^n}{N^n(N + 1)}$$

et calculer sa limite quand N tend vers l'infini.

3) Calculer la probabilité $p_{N,n}$ de tirer une boule rouge la $(n + 1)^{\text{ième}}$ fois, sachant qu'on vient de tirer n boules rouges de suite. Quelle est sa limite quand N tend vers l'infini ?

Ex 7. Filles et garçons

1) On vous présente un monsieur. Au cours de la brève conversation qui suit, vous apprenez qu'il a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ? (Justifier en donnant l'espace probabilisé et les événements utilisés).

2) Même question si on apprend qu'il a deux enfants dont l'aîné est une fille.

Ex 8. Un test sanguin est positif avec une probabilité $0,95$ sachant que la personne est malade. Ce test est négatif avec une probabilité $0,9$ sachant la personne n'est pas malade. La probabilité qu'une personne prise au hasard soit malade vaut $0,2$.

M : « la personne est malade »,
T : « le test est positif ».

1) Calculer $P(M \cap T)$.

2) Calculer $P(T)$.

3) En déduire $P(M|T)$.

4) Calculer la probabilité que le test se trompe (c'est-à-dire test positif sur une personne non malade ou test négatif sur une personne malade).

Ex 9. Jeu de franc carreau
Sur une table plane un damier est peint. Il est carré, constitué de 100 cases, et chaque case est un carré de côté de longueur 2 cm. On jette sur ce damier un pion rond, de 1 cm de diamètre.

1) Quelle est la probabilité que le pion recouvre l'un des « noeuds » du quadrillage ? On appelle noeud l'intersection de deux lignes du quadrillage.

2) Quelle est la probabilité que le pion tombe entièrement dans une case ?
On pourra modéliser cette épreuve aléatoire en considérant que le centre du pion suit une loi uniforme sur le damier.

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 10. Probabilité de gagner un jeu sur son service au tennis
On considère le modèle simplifié suivant du jeu de tennis[1] : le joueur A est au service et affronte B. Un « jeu » est constitué d'un certain nombre d' « échanges » et à la fin de chaque « échange », celui des deux joueurs qui a gagné l'échange marque un point. Le joueur qui gagne le « jeu » est le premier à totaliser au moins 4 points *avec* au moins deux points d'avance sur son adversaire. A peut donc gagner le jeu sur le score de 4 à 0, 4 à 1, 4 à 2, 5 à 3, 6 à 4,... On suppose que tous les échanges sont indépendants et que lors de chaque échange la probabilité pour A de gagner le point reste constante et vaut p. Notre objectif est de calculer en fonction de p la probabilité que A remporte le jeu. On introduit les notations d'événements suivantes.

$$\begin{aligned} G &= \{A \text{ gagne le jeu}\}, \\ A_n &= \{\ A \text{ gagne le } n\text{-ième échange }\}, \\ B_n &= \{\ B \text{ gagne le } n\text{-ième échange }\}, \\ E_{i,j} &= \{\text{Au bout de } i+j \text{ échanges, } A \text{ a } i \text{ points et } B \text{ en a } j\}. \end{aligned}$$

1) Expliquez la décomposition

$$G = E_{4,0} \cup E_{4,1} \cup E_{4,2} \cup \Big(\bigcup_{k=3}^{+\infty} E_{k+2,k} \Big).$$

[1] Il n'est pas nécessaire de connaître les règles classiques du tennis pour faire cet exercice. Elles sont rappelées dans l'énoncé sous une forme permettant de simplifier les écritures.

2) Calculer $P(E_{4,0})$, $P(E_{4,1})$ et $P(E_{4,2})$.

Indication : on remarquera que $E_{4,1} = A_5 \cap E_{3,1}$ et $E_{4,2} = A_6 \cap E_{3,2}$ et on utilisera l'indépendance des échanges.

3) Expliquer pourquoi pour tout $k \geq 3$, on a :

$$E_{k+2,k} = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j=4}^{k} C_j \Big) \cap A_{2k+1} \cap A_{2k+2},$$

où l'on a posé $C_j := (A_{2j-1} \cap B_{2j}) \cup (B_{2j-1} \cap A_{2j})$.

4) Calculer $P(E_{3,3})$, puis $r = P(C_j)$. En déduire $P(E_{k+2,k})$.

5) Montrer que les $E_{k+2,k}$ sont deux à deux disjoints et calculer $P\Big(\bigcup_{k=3}^{+\infty} E_{k+2,k} \Big)$.

6) En déduire $P(G)$.

7) L'événement $N = \{\text{le jeu continue indéfiniment sans vainqueur}\}$ s'écrit :

$$N = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j=4}^{+\infty} C_j \Big).$$

Montrer que sa probabilité est nulle.

8) Compte tenu du résultat de la question précédente, pouvez vous donner sans calcul la valeur de $P(G)$ lorsque $p = 1/2$? Utilisez cette réponse pour tester la formule trouvée à la question 6.

Ex 11. Derrière la porte

Dans un jeu de télévision américain, un candidat a le choix entre trois portes fermées. Il sait que derrière une seule de ces portes se trouve une voiture. Le candidat commence par désigner une porte, puis l'animateur en *ouvre* une - pas celle que le candidat a choisie, mais une autre, qui ne donne pas sur la voiture. On demande alors au candidat s'il veut refaire son choix ou non. Quelle serait votre décision ?