Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2008–2009**

Fiche n° 1

Ex 1. Fonction Gamma
Soit $a > 0$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et on note $\Gamma(a)$ cette intégrale.

1) Pour $b > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-bt}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut-elle ?

2) En déduire que $f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

3) Soit U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes, de densités respectives $f_{a,b}$ et $f_{c,b}$. Déterminer la loi de $U + V$.

Soit maintenant $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes, de même loi normale centrée réduite ($n > 1$).

4) Déterminer une densité de X_i^2, pour $i \in \{1, \dots, n\}$. En déduire $\Gamma(1/2)$.

5) Déterminer une densité de $Z_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2$. La loi de Z_n s'appelle loi du khi-deux à n degrés de liberté, et est notée $\chi^2(n)$.

6) Que vaut $\mathbf{E}(Z_n)$?

Ex 2. Dans cet exercice, $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et on note F la f.d.r. de X_1. On pose

$$M_n := \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

1) Exprimer à l'aide de F la f.d.r. H_n de M_n.

2) Montrer que si F est C^1, M_n a une densité que l'on peut exprimer en fonction de F.

3) On suppose dans toute la suite que les X_i sont positives et qu'il existe un réel b vérifiant

$$F(b) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x < b,\ F(x) < 1. \tag{1}$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(b - \varepsilon < M_n \leq b) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1. \tag{2}$$

On suppose désormais que chaque X_i est à valeurs dans $[0, b]$ (est-ce une grande restriction par rapport à la question précédente ?). Alors pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(M_n(\omega))_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par b, donc converge dans $\mathbb{R}_+$ vers un réel $M(\omega) \leq b$. On définit ainsi une variable aléatoire positive M.

4) Montrer que $P(M = b) = 1$.

On dit que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge presque sûrement vers* b.

5) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E} M_n = b$.

On dit que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge vers* b *dans* L^1.

Ex 3. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = X_n X_{n+1} \quad \text{et} \quad U_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

1) Quelle est la loi de Y_n $(n \in \mathbb{N}^*)$?
2) Pour quels couples (n, m) les variables Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?
3) Calculer l'espérance et la variance de U_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.
4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n}{n} - p^2\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

On dit que la suite $\left(\frac{U_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en probabilité vers* p^2.

Ex 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit la variable aléatoire Z_n par $Z_n = n\min(X_1,\dots,X_n)$.

1) Calculer la fonction de répartition F_n de Z_n.

2) Montrer que F_n converge vers une fonction F quand n tend vers $+\infty$ et que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z.

On dit que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z.