Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2007–2008**

Fiche n° 1

Ex 1. *Une fête Ch'ti (issu du partiel 2005)*
Lors de la grande fête annuelle d'une cité du Nord, le maire lance du haut du beffroi n poupées de chiffons sur la foule massée sur les deux rives d'un canal. Compte tenu de la hauteur du beffroi, de la force et de la direction du vent (et de l'expérience des années précédentes !), on estime que le point d'atterrissage d'une poupée suit la loi uniforme Q sur le rectangle représenté figure 1.

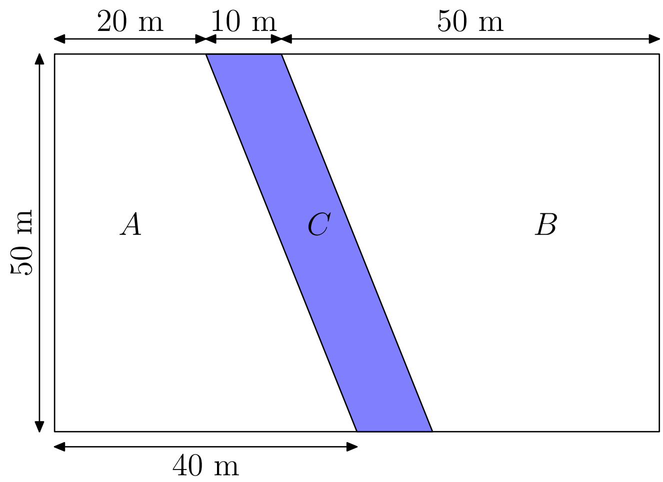

FIG. 1 – Zones d'atterrissage

1) En utilisant les renseignements fournis par la figure, calculez les probabilités $Q(A)$, $Q(B)$, $Q(C)$ pour une poupée lancée d'atterrir sur la zone A, la zone B ou dans le canal (zone C). Dans la suite, on posera pour alléger les notations $a = Q(A)$, $b = Q(B)$, $c = Q(C)$.

2) On s'intéresse désormais aux lancers des n poupées que l'on considère comme *indépendants* et on note $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé modélisant cette expérience. On note X, Y et Z les variables aléatoires correspondant aux nombres de poupées tombant respectivement en zone A, B et C. Ces trois variables aléatoires sont liées par la relation $X+Y+Z = n$. En utilisant l'indépendance des lancers et la question précédente, justifiez la formule

$$P\big((X, Y, Z) = (i, j, k)\big) = \begin{cases} \dfrac{n!}{i!\,j!\,k!} a^i b^j c^k & \text{si } i + j + k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Calculez la probabilité qu'aucune poupée ne tombe dans le canal.

4) Pour $k = 1, \dots, n$, calculez la probabilité qu'exactement k poupées tombent dans le canal.

5) En déduire les lois de X et Y, puis celle de $X + Y$.

Ex 2. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^2$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur A. Dans chacun des cas suivants, donner les lois de X et Y, et étudier leur indépendance.

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 1 \leq y \leq 2x \text{ et } y \leq 6 - x\}$,

2) $A = \left\{(x, y) \in [0, 1]^2\,,\ x \geq y + \frac{1}{2} \text{ ou } x \leq y \leq x + \frac{1}{2}\right\}$,

Ex 3. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(2x + y)\mathbf{1}_{[0,1]\times[0,2]}(x, y).$$

1) Calculer $P(X \in [0, 1])$, $P(X \leq \frac{1}{2})$, $P(Y \leq 1)$, $P\left(\{X \leq \frac{1}{2}\} \cap \{Y \leq 1\}\right)$ et $P(X + Y \leq 1)$.

2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3) Quelles sont les lois marginales de X et de Y ?

4) Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

Ex 4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi normale centrée réduite et $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

1) Quelle est la loi de $Z = XY$?

2) Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

3) Soit $U = X + Z$. Quelle est la loi de U ?

Ex 5. *(issu de l'examen 2007)*
Soit X et Y deux variables aléatoires positives telles que le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 2]$. On se propose de calculer de plusieurs manières l'espérance de la variable aléatoire positive $Z := X + Y$.

Première méthode : calcul de la fonction de répartition de Z

1) Calculer la fonction de répartition H de Z. *Indication :* on se servira de la loi du couple (X, Y) pour ramener le calcul de $P(X + Y \leq t)$ à un calcul d'aire (pour tout réel t positif fixé).

2) Tracer le graphe de H.

3) Calculer l'espérance de Z à l'aide de la fonction de répartition H et la représenter sur le graphe de H.

Deuxième méthode : calcul de la densité de Z
On pourra utiliser dans la suite le fait que X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, Y une loi uniforme sur $[0, 2]$ et que X et Y sont indépendantes (sans le redémontrer).

4) Quelles sont les densités respectives f et g de X et Y ?

5) On sait, d'après le cours, que Z est une variable à densité. En calculant un *produit de convolution*, donner la densité h de Z.

6) Contrôler le résultat précédent à l'aide du résultat de la question 1.

7) Calculer l'espérance de Z en utilisant la densité h.

Troisième méthode

8) Proposer une autre méthode pour calculer l'espérance de Z (sans avoir à calculer la loi de Z).

Ex 6. Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ admettant la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{\pi} \exp\left(-(x_1^2 - 6x_1x_2 + 25x_2^2)\right).$$

1) Quelles sont les densités marginales de (X_1, X_2) ? Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

2) Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. On définit un nouveau vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ par $(Y_1, Y_2) := (aX_1 + bX_2, X_2)$. Ce vecteur admet-il une densité, et si oui, laquelle ?

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 7. *Consommation d'eau (suite)*
La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :

$$f(t) = c(t-a)(b-t)\mathbf{1}_{[a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$).

1) En notant X_i la consommation du i-ième jour et en supposant que les X_i sont indépendantes et de même loi que X, exprimer à l'aide de la fonction de répartition F de X et de n, la fonction de répartition de la variable aléatoire $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

2) En fait, la ville est alimentée en eau par un canal qui peut fournir au maximum une quantité journalière d'eau $x_0 = a + 0.9(b-a)$ et par un réservoir de sécurité dans lequel on peut puiser en cas de trop forte demande. Calculer numériquement la probabilité qu'au cours des 31 jours du mois de juillet, on ne fasse jamais usage du réservoir de sécurité (le résultat ne dépend ni de a ni de b).

Ex 8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres α. Déterminer les lois de $-Y$, $X + Y$ et $X - Y$.

Ex 9. Soit L une variable aléatoire positive admettant une densité de probabilité f et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de L. On définit deux variables aléatoires L_1 et L_2 par $L_1 = XL$ et $L_2 = (1-X)L$ (cela représente par exemple la rupture aléatoire en deux morceaux de longueur L_1 et L_2, d'une certaine molécule de longueur aléatoire L).

1) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) ainsi que les lois de L_1 et L_2.
2) Que peut-on dire du couple (L_1, L_2) lorsque $f(y) = \alpha^2 y e^{-\alpha y} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y)$ $(\alpha > 0)$?
3) Déterminer la loi de $Z = \min\{L_1, L_2\}$.