Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Fiche n° 1

Rappels ensemblistes

Ex 1. Rat de laboratoire
Un rat de laboratoire est soumis à n tests différents. On note A_i l'événement « il réussit le $i^{\text{ème}}$ test ». Exprimer les indicatrices des événements suivants à partir des indicatrices des A_i :

1) événement B : « il réussit tous les tests ».
2) événement C : « il réussit au moins un test ».
3) événement D_k : « il réussit exactement k tests ».

Pour quels k la formule obtenue est-elle valable ? Combien comporte-t-elle de termes ?

Ex 2. Suite de fonctions
On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto f_n(\omega)$. On pose pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$B_{\varepsilon,k} = \{\omega \in \Omega;\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

1) On fixe $\varepsilon > 0$. Ecrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur les $B_{\varepsilon,k}$, l'ensemble :

$$A_{\varepsilon,n} = \{\omega \in \Omega;\ \forall k \geq n,\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

2) Même question pour :

$$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega;\ \exists n(\omega),\ \forall k \geq n(\omega),\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

3) Montrer que l'ensemble :

$$A = \{\omega \in \Omega;\ \lim_{k\to+\infty} f_k(\omega) = 0\}$$

peut s'écrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur *une suite* d'ensembles du type $B_{\varepsilon,k}$.

Ex 3. Un double temps d'attente *(première partie)*
On dispose d'un dé bleu et d'un dé rouge *équilibrés* et on effectue une suite infinie de lancers de cette paire de dés. Pour un lancer nous pouvons modéliser cette expérience par l'ensemble $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ des couples à composantes dans $\{1, \dots, 6\}$, la première composante représentant le nombre indiqué par le dé bleu et la deuxième celui indiqué par le dé rouge. Pour représenter la suite infinie de lancers, nous utiliserons l'ensemble

$$\Omega := E^{\mathbb{N}^*} = \big\{(\omega_n)_{n\geq 1};\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n = (\omega_{n,1}, \omega_{n,2}) \in E\big\}$$

des suites infinies de couples éléments de E. Définissons les ensembles (évènements) suivants.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k est l'évènement « la première obtention du chiffre 2 avec le dé bleu a lieu lors du k^{e} lancer ».
- A' est l'évènement « le dé bleu ne donne jamais le chiffre 2 ».
- Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, B_ℓ est l'évènement « la première obtention du chiffre 3 ou du chiffre 6 avec le dé rouge a lieu lors du ℓ^{e} lancer ».
- B' est l'évènement « le dé rouge ne donne jamais le chiffre 3 ni le 6 ».

1) Décrire en une phrase les complémentaires de A' et de B'.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$F_n := \{\text{au } n^{\text{e}} \text{ lancer, le dé bleu donne le chiffre } 2\}$$
$$G_n := \{\text{au } n^{\text{e}} \text{ lancer, le dé rouge donne un chiffre multiple de } 3\}.$$

Exprimer les évènements A_k et B_l pour $k, l \in \mathbb{N}^*$ en fonction des évènements $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3) Exprimer les évènements A' et B' en fonction des évènements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(G_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

4) Exprimer l'évènement E : « le dé bleu finit par sortir un 2 et le dé rouge finit par sortir un multiple de 3 » en fonction des évènements A' et B'.

5) Exprimer l'évènement C : « le dé bleu donne 2 pour la première fois avant que le rouge donne un 3 ou un 6 » en fonction des évènements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(G_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Comparer l'évènement E aux évènements A' et B'.

Dénombrabilité

Ex 4. Un double temps d'attente *(suite de la première partie)*
On reprend les notations de l'exercice 3. On considère les ensembles (évènements)

- A' : « le dé bleu ne donne jamais le chiffre 2 »,
- B' : « le dé rouge ne donne jamais le chiffre 3 ni le 6 ».
- C : « le dé bleu donne 2 pour la première fois avant que le rouge donne un 3 ou un 6 ».

Etudier la dénombrabilité de ces ensembles.

Ex 5. Les décimaux
Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres réels décimaux (*i.e.* de la forme $k10^{-n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) est dénombrable.

Ex 6. Les irrationnels
Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.

Ex 7. Les nombres algébriques
Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1) l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

2) l'ensemble des nombres algébriques (un nombre réel ou complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers).

Ex 8. Discontinuité d'une fonction monotone
Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone f sur $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

Indications : on peut se ramener au cas où f est définie et croissante sur un intervalle fermé borné ; que peut-on dire de l'ensemble $D_\varepsilon(f)$ des points où f présente un saut d'amplitude supérieure ou égale à ε ?

Séries et familles sommables

Ex 9. Fraction et série
Trouvez une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers appartenant chacun à $\{0,\ldots,9\}$ et telle que

$$\frac{19}{44} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{10^i}.$$

Justifiez votre réponse par un calcul de somme de série.

Ex 10. Une excentricité
Etudier la finitude de la somme suivante $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}$.

Ex 11. La série exponentielle
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $f(x)$ sa somme. Etablir que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Ex 12. Sur la série harmonique alternée...
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la famille de réels définie par $nu_n = (-1)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $x > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et a pour somme $\ln 2$. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

2) On considère la série formée en prenant dans la série de terme général u_n, dans l'ordre où ils apparaissent, un terme positif, un terme négatif, un terme positif, deux termes négatifs,..., le $p^{\text{ème}}$ terme positif puis 2^{p-1} termes négatifs, etc... Quelle est la nature de la série obtenue ?

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \{2k-1, 4k-2, 4k\}$ et $w_k = \sum_{j\in I_k} u_j$. Vérifier que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une partition de $\mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $w_k = (u_{2k-1} + u_{2k})/2$. En déduire que la suite $(\sum_{k=1}^n w_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $(\ln 2)/2$.

4) Commenter les résultats obtenus.

Ex 13. Une intervertion de somme bien utile
Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs.

1) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ka_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i.$$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1}$ pour tout réel $x \in]0,1[$.

Ex 14. Une somme doublement géométrique
On définit la famille de réels $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} := \frac{1}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^j.$$

1) Montrez que $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculez sa somme.
2) On note L le sous ensemble de $\mathbb{N}^2$ défini par

$$L := \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2;\ 0 \leq i \leq j\right\}$$

et on s'intéresse à la famille $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in L}$.

a) Représentez graphiquement L.
b) Expliquez brièvement pourquoi $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in L}$ est sommable.
c) Calculez la somme de cette famille.

Entraînement supplémentaire

Ex 15. En calculant une somme de série, vérifier que le nombre réel 0,379 999 999 999 ... est égal au nombre 0,38.

L'écriture 0,379 999 999 999 ... porte le nom de « développement décimal illimité impropre » du nombre 0,38. On appelle « développement décimal illimité propre » d'un réel x, un développement qui ne comporte pas la répétition indéfinie du chiffre 9 à partir d'un certain rang. Par exemple 0,380 000 000 000 ... est le développement décimal illimité propre de 0,38. Y a-t-il des nombres réels qui n'ont pas de développement décimal illimité impropre ? Lesquels ?

Ex 16. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{i,j} = \frac{p^i}{j!} \quad \text{pour} \quad |p| < 1.$$

1) La famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ? Si oui, calculer sa somme.
2) On note $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ ,\ i \geq j\}$.
– Représenter l'ensemble A.
– Montrer que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Ex 17. En calculant de deux façons la somme d'une série double, établir que, pour x réel tel que $|x| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 - x^{2n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1 - x^{2k}}.$$

Ex 18. Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{n,m} = \frac{1}{n^2 - m^2} \quad \text{si} \quad n \neq m \quad \text{et} \quad a_{n,n} = 0.$$

1) La famille $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

2) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}.$$

Indications : montrer que $a_{n,m} = \frac{1}{2n}(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m})$ (pour $n \neq 0$), en déduire que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \frac{1}{4n^2},$$

(toujours pour $n \neq 0$) et conclure...