Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Fiche n° 1

Rappels ensemblistes

Ex 1. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto f_n(\omega)$. On pose pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$B_{\varepsilon,k} = \{\omega \in \Omega;\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

1) On fixe $\varepsilon > 0$. Ecrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur les $B_{\varepsilon,k}$, l'ensemble :

$$A_{\varepsilon,n} = \{\omega \in \Omega;\ \forall k \geq n,\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

2) Même question pour :

$$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega;\ \exists n(\omega),\ \forall k \geq n(\omega),\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

3) Montrer que l'ensemble :

$$A = \{\omega \in \Omega;\ \lim_{k\to+\infty} f_k(\omega) = 0\}$$

peut s'écrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur *une suite* d'ensembles du type $B_{\varepsilon,k}$.

Ex 2. Tirer un nombre réel au hasard
On décide de « tirer au hasard » un réel $x \in [0,1[$. Pour cela on effectue — par la pensée ! — une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant des boules marquées chacune d'un chiffre décimal. On construit x en écrivant — toujours par la pensée — son développement décimal illimité, le numéro sorti au i^{e} tirage fournissant le i^{e} chiffre décimal de x. La composition précise de l'urne est inconnue. On sait seulement qu'il y a au moins une boule marquée 0, qu'il n'y a aucune boule marquée 9 et qu'il y a au moins une boule marquée d'un autre chiffre que 0. Comme aucune boule dans l'urne n'est marquée 9, le développement décimal illimité ainsi obtenu est forcément propre.

Pour chaque i de $\mathbb{N}^*$ on note N_i l'événement :

$$N_i := \{\text{le } i^{\text{e}} \text{ chiffre de } x \text{ après la virgule est un zéro}\}$$

1) Exprimer par des opérations ensemblistes sur les N_i les événements :

$A := \{x < 10^{-4}\}$,
$D_n := \{$l'écriture décimale illimitée de x ne comporte que des zéros à partir du rang $n\}$,
$D := \{x$ est un nombre décimal $\}$,
$E := \{$l'écriture de x comporte une infinité de zéros$\}$.

On pourra montrer au passage que la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et exprimer D en fonction de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Comparer D et E.

3) Ecrire leur complémentaire.

Dénombrabilité

Ex 3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres réels décimaux (*i.e.* de la forme $k10^{-n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) est dénombrable.

Ex 4. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1) l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

2) l'ensemble des nombres algébriques (un nombre réel ou complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers).

Ex 5. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone f est au plus dénombrable.
Indications : on peut se ramener au cas où f est définie et croissante sur l'intervalle $[a, b]$; que peut-on dire de l'ensemble $D_\varepsilon(f)$ des points où f présente un saut d'amplitude supérieure ou égale à ε ?

Ex 6.

1) L'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

2) Même question avec l'ensemble $\mathcal{P}_i(\mathbb{N})$ des parties infinies de $\mathbb{N}$.

Séries et familles sommables

Ex 7. En calculant une somme de série, vérifier que le nombre réel 0,379 999 999 999 . . . est égal au nombre 0,38.

L'écriture 0,379 999 999 999 . . . porte le nom de « développement décimal illimité impropre » du nombre 0,38. On appelle « développement décimal illimité propre » d'un réel x, un développement qui ne comporte pas la répétition indéfinie du chiffre 9 à partir d'un certain rang. Par exemple 0,380 000 000 000 . . . est le développement décimal illimité propre de 0,38. Y a-t-il des nombres réels qui n'ont pas de développement décimal illimité impropre ? Lesquels ?

Ex 8. La figure 1 page 3 propose une « preuve graphique » de la formule donnant la somme de la série géométrique $\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}$, où $q \in]0, 1[$ et $p = 1 - q$. À vous de fournir les explications qui manquent pour rendre cette preuve convaincante.
Indications : commencez par noter sur la figure 2 page 3 l'aire de chacun des 3 rectangles issus du découpage du carré de côté c.

Ex 9. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs.

1) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ka_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i.$$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1}$ pour tout réel $x \in]0, 1[$.

Ex 10. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable dont la somme est notée S.

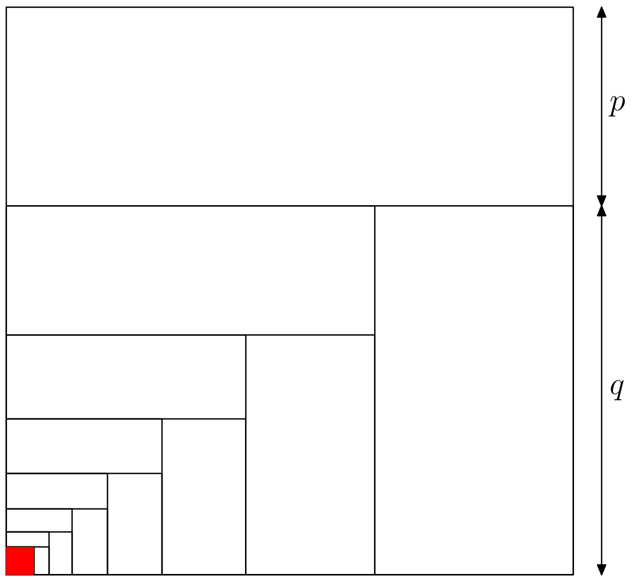

FIG. 1 – Une méthode graphique pour calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}$

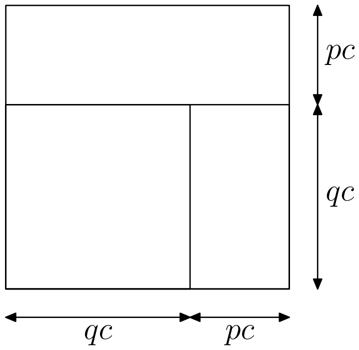

FIG. 2 – Découpage du carré de côté c

1) Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de I convergeant vers I, c'est à dire telle que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} I_n = I$. On pose $v_n := \sum_{i\in I_n} a_i$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une suite qui converge vers S.

2) En déduire que si $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I, alors

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in J_n} a_i.$$

Ex 11. Etudier la finitude de la somme suivante $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}$.

Ex 12. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{i,j} = \frac{p^i}{j!} \quad \text{pour} \quad |p| < 1.$$

1) La famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ? Si oui, calculer sa somme.

2) On note $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ , \ i \geq j\}$.
– Représenter l'ensemble A.
– Montrer que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Ex 13. En calculant de deux façons la somme d'une série double, établir que, pour x réel tel que $|x| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^{2k}}.$$

Entraînement supplémentaire

Ex 14. Peut-on construire un ensemble E tel que $\mathcal{P}(E)$ soit dénombrable ? (si oui, donner un exemple, si non, expliquer pourquoi !)

Ex 15. Trouvez une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers appartenant chacun à $\{0,\ldots,9\}$ et telle que

$$\frac{19}{44} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{10^i}.$$

Justifiez votre réponse par un calcul de somme de série.

Ex 16. Etudier la finitude des sommes suivantes

$$\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(i+j)^\alpha} \quad , \quad \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^\alpha + j^\alpha}.$$

Ex 17. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont pairs,} \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont impairs,} \\ 0 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont de parité différente.} \end{cases}$$

Démontrer que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Ex 18. Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{n,m} = \frac{1}{n^2 - m^2} \quad \text{si} \quad n \neq m \quad \text{et} \quad a_{n,n} = 0.$$

1) La famille $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?
2) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}.$$

Indications : montrer que $a_{n,m} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m}\right)$ (pour $n \neq 0$), en déduire que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \frac{1}{4n^2},$$

(toujours pour $n \neq 0$) et conclure...