Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2007–2008**

Fiche n° 1

Rappels ensemblistes

Ex 1. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto f_n(\omega)$. On pose pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$B_{\varepsilon,k} = \{\omega \in \Omega;\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

1) On fixe $\varepsilon > 0$. Ecrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur les $B_{\varepsilon,k}$, l'ensemble :

$$A_{\varepsilon,n} = \{\omega \in \Omega;\ \forall k \geq n,\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

2) Même question pour :

$$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega;\ \exists n(\omega),\ \forall k \geq n(\omega),\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

3) Montrer que l'ensemble :

$$A = \{\omega \in \Omega;\ \lim_{k\to+\infty} f_k(\omega) = 0\}$$

peut s'écrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur *une suite* d'ensembles du type $B_{\varepsilon,k}$.

Ex 2. On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A_i = \{\text{Obtention de pile au } i^{\text{e}} \text{ lancer}\}.$$

1) Ecrire à l'aide des événements A_i et A_i^c les événements :

$$E_5 = \{\text{La première apparition de pile a lieu } \textit{après} \text{ le } 5^{\text{e}} \text{ lancer}\},$$

$$F_5 = \{\text{Pile n'apparaît pas au cours des 5 premiers lancers}\}.$$

2) Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :

$$G_5 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, \quad H_5 = \Big(\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\Big), \quad I_5 = \bigcup_{i\geq 5} A_i.$$

3) Comparer les événements E_5, F_5, G_5, H_5, et I_5.

4) On pose $C_n = \bigcup_{i \geq n} A_i$. Montrer que la suite (C_n) est décroissante (i.e. que pour tout $n \geq 1$, C_{n+1} est inclus dans C_n). Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'événement $C = \bigcap_{n \geq 1} C_n$. Décrire son complémentaire.

5) Ecrire à l'aide des A_i l' événement :

$$B = \{\text{On n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer}\}.$$

Comparer B et C.

Dénombrabilité

Ex 3. Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.

Ex 4. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1) l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

2) l'ensemble des nombres algébriques (un nombre réel ou complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers).

Ex 5. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone f est au plus dénombrable.
Indications : on peut se ramener au cas où f est définie et croissante sur l'intervalle $[a, b]$; que peut-on dire de l'ensemble $D_\varepsilon(f)$ des points où f présente un saut d'amplitude supérieure ou égale à ε ?

Ex 6. Peut-on construire un ensemble E tel que $\mathcal{P}(E)$ soit dénombrable ? (si oui, donner un exemple, si non, expliquer pourquoi !)

Ex 7.

1) L'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

2) Même question avec l'ensemble $\mathcal{P}_i(\mathbb{N})$ des parties infinies de $\mathbb{N}$.

Séries et familles sommables

Ex 8. Trouvez une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers appartenant chacun à $\{0, \ldots, 9\}$ et telle que

$$\frac{19}{44} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{10^i}.$$

Justifiez votre réponse par un calcul de somme de série.

Ex 9. La figure 1 page 3 propose une « preuve graphique » de la formule donnant la

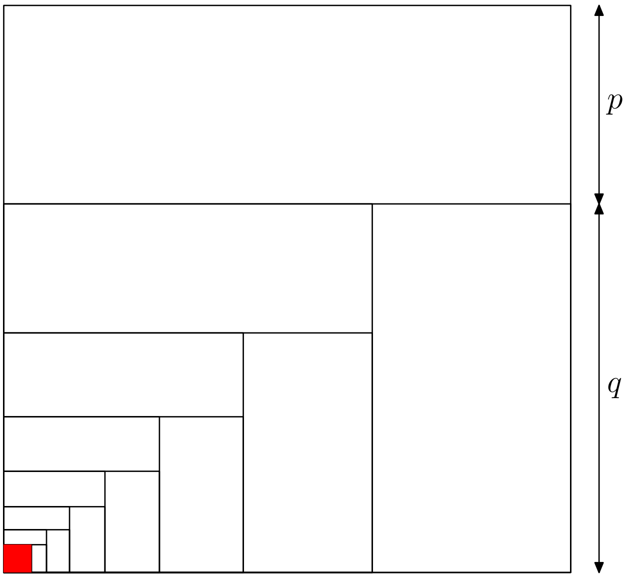

FIG. 1 – Une méthode graphique pour calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}$

somme de la série géométrique $\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}$, où $q \in]0,1[$ et $p = 1 - q$. À vous de fournir les explications qui manquent pour rendre cette preuve convaincante.
Indications : commencez par noter sur la figure 2 page 3 l'aire de chacun des 3 rectangles issus du découpage du carré de côté c.

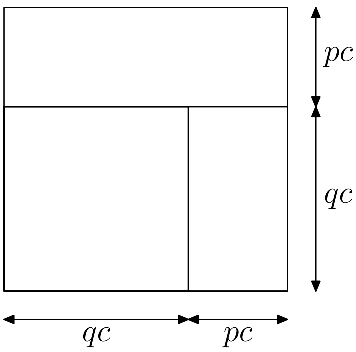

FIG. 2 – Découpage du carré de côté c

Ex 10. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs.

1) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ka_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i.$$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1}$ pour tout réel $x \in]0,1[$.

Ex 11. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{i,j} = \frac{p^i}{j!} \quad \text{pour} \quad |p| < 1.$$

1) La famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ? Si oui, calculer sa somme.
2) On note $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ , \ i \geq j\}$.
– Représenter l'ensemble A.
– Montrer que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Ex 12. Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{n,m} = \frac{1}{n^2 - m^2} \quad \text{si} \quad n \neq m \quad \text{et} \quad a_{n,n} = 0.$$

1) La famille $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?
2) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}.$$

Indications : montrer que $a_{n,m} = \frac{1}{2n}(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m})$ (pour $n \neq 0$), en déduire que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \frac{1}{4n^2},$$

(toujours pour $n \neq 0$) et conclure...

Entraînement supplémentaire

Ex 13. Etudier la finitude des sommes suivantes

$$\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(i+j)^\alpha} \quad , \quad \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^\alpha + j^\alpha} \quad , \quad \sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}.$$

Ex 14. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont pairs,} \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont impairs,} \\ 0 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont de parité différente.} \end{cases}$$

Démontrer que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Ex 15. En calculant de deux façons la somme d'une série double, établir que, pour x réel tel que $|x| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 - x^{2n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1 - x^{2k}}.$$