Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Fiche n° 1

Rappels ensemblistes

Ex 1. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto f_n(\omega)$. On pose pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$B_{\varepsilon,k} = \{\omega \in \Omega;\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

1) On fixe $\varepsilon > 0$. Ecrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur les $B_{\varepsilon,k}$, l'ensemble :

$$A_{\varepsilon,n} = \{\omega \in \Omega;\ \forall k \geq n,\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

2) Même question pour :

$$A_{\varepsilon} = \{\omega \in \Omega;\ \exists n(\omega),\ \forall k \geq n(\omega),\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

3) Montrer que l'ensemble :

$$A = \{\omega \in \Omega;\ \lim_{k\to+\infty} f_k(\omega) = 0\}$$

peut s'écrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur *une suite* d'ensembles du type $B_{\varepsilon,k}$.

Correction .

1) $\omega \in A_{\epsilon,n}$ si et seulement si $\omega \in B_{\epsilon,k}$ pour tout $k \geq n$, autrement dit

$$A_{\epsilon,n} = \bigcap_{k\geq n} B_{\epsilon,k}.$$

2) $\omega \in A_{\epsilon}$ si et seulement si il existe un entier n (qui dépend de ω) tel que $\omega \in A_{\epsilon,n}$, ainsi

$$A_{\epsilon} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\epsilon,n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} B_{\epsilon,k}.$$

3) Dire que $\omega \in A$ revient à dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une entier n (qui dépend de ω et de ϵ) tel que pour tout $k \geq n$ $|f_k(\omega)| < \epsilon$, autrement dit

$$A = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} B_{\epsilon,k}.$$

Or, on n'obtient pas une écriture faisant intervenir une *suite* d'ensembles $B_{\epsilon,k}$ (autrement dit, il ne s'agit pas d'une union *dénombrable* d'ensembles ; pour y remédier, il suffit de remplacer ϵ par $1/m$ (ou 10^{-m} ou toute suite convergeant vers 0), ce qui ne change pas la définition et permet d'obtenir une union dénombrable d'ensembles :

$$A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} B_{\frac{1}{m},k}.$$

Ex 2. On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A_i = \{\text{Obtention de pile au } i^{\text{e}} \text{ lancer}\}.$$

1) Ecrire à l'aide des événements A_i et A_i^c les événements :

$$E_5 = \{\text{La première apparition de pile a lieu } \textit{après} \text{ le } 5^{\text{e}} \text{ lancer}\},$$

$$F_5 = \{\text{Pile n'apparaît pas au cours des 5 premiers lancers}\}.$$

2) Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :

$$G_5 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, \quad H_5 = \Big(\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\Big), \quad I_5 = \bigcup_{i\geq 5} A_i.$$

3) Comparer les événements E_5, F_5, G_5, H_5, et I_5.

4) On pose $C_n = \bigcup_{i\geq n} A_i$. Montrer que la suite (C_n) est décroissante (i.e. que pour tout $n \geq 1$, C_{n+1} est inclus dans C_n). Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'événement $C = \bigcap_{n\geq 1} C_n$. Décrire son complémentaire.

5) Ecrire à l'aide des A_i l' événement :

$$B = \{\text{On n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer}\}.$$

Comparer B et C.

Correction .

1)

$$E_5 = \Big(\bigcap_{i=1}^{5} A_i^c\Big) \cap \Big(\bigcup_{i=6}^{+\infty} A_i\Big), \quad F_5 = \bigcap_{i=1}^{5} A_i^c.$$

2)

$$G_5 = \{\text{On obtient que des piles à partir du } 5^{\text{e}}\text{lancer}\},$$

$$H_5 = \{\text{On obtient des faces lors des 4 premiers lancers puis que des piles ensuite}\},$$

$$I_5 = \{\text{On obtient au moins un pile à partir du } 5^{\text{e}}\text{lancer }\}.$$

3) $H_5 \subset G_5 \subset I_5$ et $E_5 \subset I_5$.

4) Pour tout $n \geq 1$, $C_n = C_{n+1} \cup A_n$ donc C_n contient C_{n+1}. L'événement C est réalisé si quelque soit $n \geq 1$, on obtient pile au moins une fois après le n^{e} lancer, autrement dit, si on obtient pile une infinité de fois. Son complémentaire est l'événement : on obtient pile un nombre fini de fois, i.e. on obtient que des faces à partir d'un certain lancer :

$$C^c = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{i\geq n} A_i^c.$$

5) $B = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{i\geq n} A_i$. Si on obtient que des piles à partir d'un certain lancer alors on obtient une infinité de piles donc, $B \subset C$.

Dénombrabilité

Ex 3. Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.
Correction . L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est infini non dénombrable et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable (cf. cours). Donc, l'ensemble des irrationnels, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est infini non dénombrable.

Ex 4. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1) l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

2) l'ensemble des nombres algébriques (un nombre réel ou complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers).

Ex 5. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone f est au plus dénombrable.
Indications : on peut se ramener au cas où f est définie et croissante sur l'intervalle $[a, b]$; que peut-on dire de l'ensemble $D_\varepsilon(f)$ des points où f présente un saut d'amplitude supérieure ou égale à ε ?

Ex 6. Peut-on construire un ensemble E tel que $\mathcal{P}(E)$ soit dénombrable ? (si oui, donner un exemple, si non, expliquer pourquoi !)
Correction .
Si E est un ensemble fini alors $\mathcal{P}(E)$ est fini (de cardinal $2^{\text{Card}(E)}$) et donc non dénombrable.
• Si E est infini, alors il existe un injection ϕ de $\mathbb{N}$ dans E. On définit alors

$$\varphi \ : \ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(E) \ , \ A \to \phi(A) = \{e \in E \ : \ \exists n \in A \ , \ e = \phi(n)\} \, .$$

L'application φ est injective. En effet, si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A \neq B$, alors il existe un entier n qui est dans A et pas dans B (ou l'inverse). Ainsi $\phi(n) \in \varphi(A)$ et $\phi(n) \notin \varphi(B)$ (car sinon il existerait $m \in B$ tel que $\phi(n) = \phi(m)$, mais l'injectivité de ϕ implique $n = m$ ce qui contredit $n \notin B$). Si $\mathcal{P}(E)$ était au plus dénombrable alors il existerait une injection ψ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$ et $\psi \circ \varphi$ serait une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

dans $\mathbb{N}$. Ce qui est impossible car $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. Donc $\mathcal{P}(E)$ n'est pas dénombrable (de plus il est infini car il contient l'ensemble des singletons de E).

Ex 7.

1) L'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?
2) Même question avec l'ensemble $\mathcal{P}_i(\mathbb{N})$ des parties infinies de $\mathbb{N}$.

Correction .

1) On écrit $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ comme union dénombrable d'ensembles finis ce qui permet de conclure que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est au plus dénombrable. Il est clair que pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$, il existe un entier n tel que $A \in \mathcal{P}([0,\dots,n])$, ainsi

$$\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}([0,\dots,n]).$$

Or $\mathcal{P}([0,\dots,n])$ est un ensemble fini (de cardinal 2^{n+1}). On conclut donc que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est au plus dénombrable (comme réunion dénombrable d'ensembles finis).
Or, $\{\{n\}\ ,\ n\in\mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ et donc $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est infini. Finalement, $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est dénombrable.

2) Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \cup \mathcal{P}_i(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}_i(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable (car sinon $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ serait dénombrable).

Séries et familles sommables

Ex 8. La figure 1 page 5 propose une « preuve graphique » de la formule donnant la somme de la série géométrique $\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}$, où $q \in]0,1[$ et $p = 1-q$. À vous de fournir les explications qui manquent pour rendre cette preuve convaincante. Indication : commencez par noter sur la figure 2 page 5 l'aire de chacun des 3 rectangles issus du découpage du carré de côté c.

Ex 9. Trouvez une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers appartenant chacun à $\{0,\dots,9\}$ et telle que

$$\frac{19}{44} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{10^i}.$$

Justifiez votre réponse par un calcul de somme de série.
Indication : On pourra effectuer la division euclidienne de 19 par 44.

Ex 10. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs.

1) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i.$$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1}$ pour tout réel $x \in]0,1[$.

Correction .

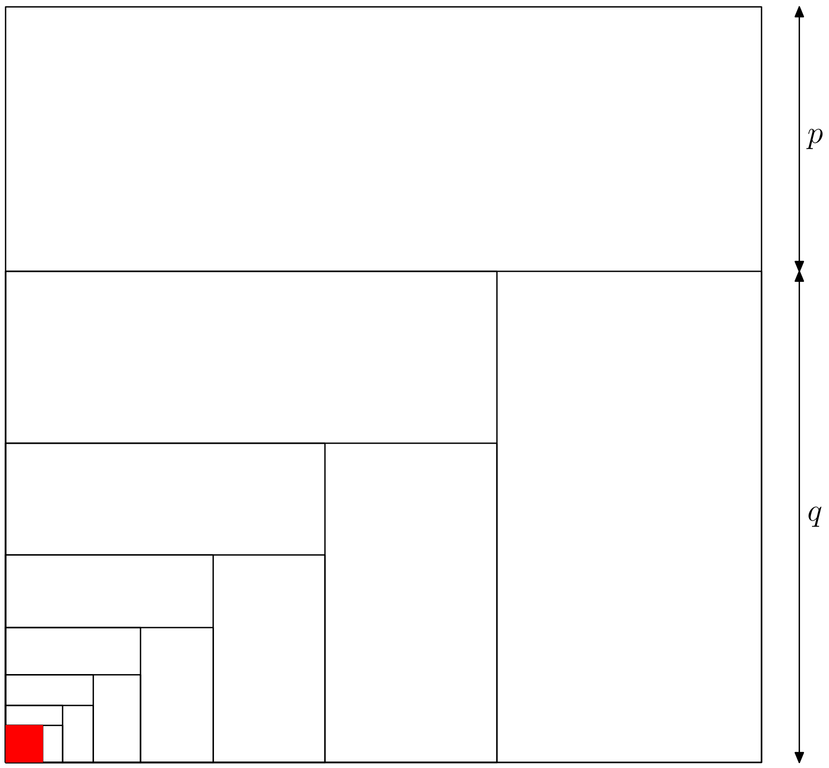

FIG. 1 – Une méthode graphique pour calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}$

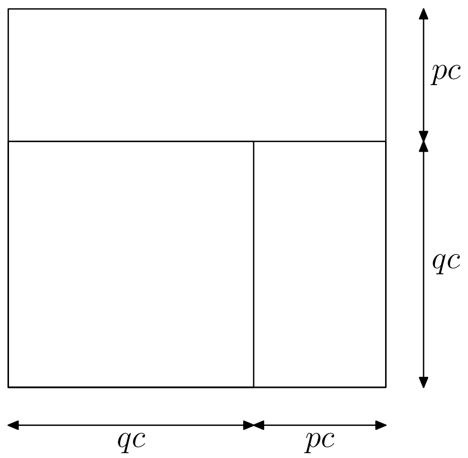

FIG. 2 – Découpage du carré de côté c

1) Nous allons justifier le raisonnement suivant qui consiste à écrire

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \dots & & \\
 & & & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \dots & & \\
 & & & & & + & a_3 & + & a_4 & + & \dots & & \\
 & & & & & & & + & a_4 & + & \dots & & \\
 & & & & & & & & & + & \dots & & \\
 & = & a_1 & + & 2a_2 & + & 3a_3 & + & 4a_4 & + & \dots & = & \sum_{k=0}^{+\infty} ka_k.
\end{array}$$

Ce raisonnement revient à intervertir les sommations ce qui est possible pour la famille de réels positifs $(a_i \mathbf{1}_{i>k})_{(i,k)\in\mathbb{N}^2}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i = \sum_{(i,k)\in\mathbb{N}^2} a_i \mathbf{1}_{i>k} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{i-1} a_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} i a_i,$$

(l'égalité démontrée est une égalité valable dans $\bar{\mathbb{R}}_+$). Le résultat reste valable pour une famille de réels (pas nécéssairement positifs) telle que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} ka_k$ soit absolument convergente.

2) On peut ainsi obtenir

$$\begin{array}{rcc}
\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} & = & \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=k+1}^{+\infty} x^{i-1} \\
 & = & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x} \\
 & = & \frac{1}{(1-x)^2}.
\end{array}$$

Ce résultat peut aussi se retrouver en dérivant le développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Ex 11. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{i,j} = \frac{p^i}{j!} \quad \text{pour} \quad |p| < 1.$$

1) La famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ? Si oui, calculer sa somme.

2) On note $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ , \ i \geq j\}$.
– Représenter l'ensemble A.
– Montrer que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Ex 12. Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{n,m} = \frac{1}{n^2 - m^2} \quad \text{si} \quad n \neq m \quad \text{et} \quad a_{n,n} = 0.$$

1) La famille $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

2) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}.$$

Indications : on pourra décomposer $\dfrac{1}{n^2-m^2}$ en éléments simples et montrer que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \frac{1}{4n^2} \quad \text{et} \quad n \neq 0.$$

Entraînement supplémentaire

Ex 13. Etudier la finitude des sommes suivantes

$$\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(i+j)^\alpha} \quad , \quad \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^\alpha + j^\alpha} \quad , \quad \sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}.$$

Ex 14. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont pairs,} \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont impairs,} \\ 0 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont de parité différente.} \end{cases}$$

Démontrer que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Correction . • Pour montrer la sommabilité de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$, on écrit les inégalités suivantes (à priori valables dans $\bar{\mathbb{R}}_+$) :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |a_{i,j}| &\leq \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}\right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j}\right) = 4 < +\infty. \end{aligned}$$

La première inégalité provient du fait que pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $|a_{i,j}| \leq (1/2)^{i+j}$, elle fait ainsi apparaître le produit de deux séries à termes positifs convergentes (géométriques).
• On applique le principe de sommation par paquets à la partition $\mathbb{N}^2 = A \cup B \cup C$ où $A = I \times I$, $B = P \times P$ et $C = (I \times P) \cup (P \times I)$ où P désigne l'ensemble des entiers pairs et I l'ensemble des entiers impairs. nsi, les trois familles $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$, $(a_{i,j})_{(i,j)\in B}$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in C}$ sont sommables et

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} + \sum_{(i,j)\in B} a_{i,j} + \sum_{(i,j)\in C} a_{i,j}.$$

Et on calcule les trois sommes de cette égalité :

$$\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_{2k+1,2l+1} = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} -\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2l+2} = -\frac{1}{4}\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+l}$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{4^k}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{1}{4^l}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9},$$

$$\sum_{(i,j)\in B} a_{i,j} = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_{2k,2l} = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2l} = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+l} = \frac{16}{9},$$

et bien sur $\sum_{(i,j)\in B} a_{i,j} = 0$. En conclusion $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j} = \frac{4}{3}$.

Ex 15. En calculant de deux façons la somme d'une série double, établir que, pour x réel tel que $|x| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^{2k}}.$$

Indication : Faire apparaître une série double en écrivant le terme $\frac{1}{1-x^{2n+1}}$ (dans la première série) ou $\frac{1}{1-x^{2k}}$ (dans la deuxième série) comme la somme d'une série géométrique. Après s'être assuré da la sommabilité de la série double ainsi obtenue (en considérant les valeurs absolues), vous pouvez intervertir les sommations pour aboutir au résultat.