Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE **Année 2004-2005**

Fiche 1

Ex 1.

1) Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres réels décimaux (*i.e.* de la forme $k10^{-n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) est dénombrable.

Ex 2.

1) L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?
(indication : utiliser des indicatrices).

2) Même question avec l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$.

3) Peut-on construire un ensemble E tel que $\mathcal{P}(E)$ soit dénombrable ? (si oui, donner un exemple, si non, expliquer pourquoi !)

Ex 3. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $f(x)$ sa somme. Etablir que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Ex 4. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ la famille de réels définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont pairs,} \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont impairs,} \\ 0 & \text{si} \quad i \text{ et } j \text{ sont de parité différente.} \end{cases}$$

Démontrer que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, puis calculer sa somme.

Ex 5. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels telle que la série $(ka_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit absolument convergente.
Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ka_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i.$$

Ex 6. En calculant de deux façons la somme d'une série double, établir que, pour x réel tel que $|x| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 - x^{2n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1 - x^{2k}}.$$

Ex 7. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto f_n(\omega)$. On pose pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$B_{\varepsilon,k} = \{\omega \in \Omega;\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

1) On fixe $\varepsilon > 0$. Ecrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur les $B_{\varepsilon,k}$, l'ensemble :

$$A_{\varepsilon,n} = \{\omega \in \Omega;\ \forall k \geq n,\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

2) Même question pour :

$$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega;\ \exists n(\omega),\ \forall k \geq n(\omega),\ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

3) Montrer que l'ensemble :

$$A = \{\omega \in \Omega;\ \lim_{k\to+\infty} f_k(\omega) = 0\}$$

peut s'écrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur *une suite* d'ensembles du type $B_{\varepsilon,k}$.

Ex 8. Un rat de laboratoire est soumis à n tests différents. On note A_i l'événement "il réussit le $i^{\text{ème}}$ test". Exprimer les indicatrices des événements suivants à partir des indicatrices des A_i :

1) événement B : "il réussit tous les tests".
2) événement C : "il réussit au moins un test".
3) événement D_k : "il réussit exactement k tests".

Pour quels k la formule obtenue est-elle valable ? Combien comporte-t-elle de termes ?

Ex 9. Un puzzle pour Noël

Un enfant a reçu pour Noël un puzzle composé de 9 pièces carrées. Chaque pièce peut être tournée dans 4 positions différentes, et les 9 pièces se placent sur un carré de 3 lignes et 3 colonnes. Lorsque les pièces sont dans la bonne position, on obtient une image.

1) L'enfant place les pièces au hasard. Calculer sa probabilité d'obtenir l'image, éventuellement à l'envers ou tournée.

2) L'enfant est capable de finir seul le puzzle si les pièces sont placées de telle sorte qu'il suffit d'en tourner 3 (ou moins) pour obtenir l'image, éventuellement à l'envers ou tournée. Calculer la probabilité qu'en posant les pièces au hasard, il obtienne une configuration où il est capable de finir seul le puzzle.

Ex 10. Dans une ville de $n + 1$ habitants, une personne raconte une histoire à une seconde personne, qui la raconte à une troisième personne, et ainsi de suite. A chaque étape, l'individu à qui on raconte une histoire est choisi au hasard. L'histoire est racontée n fois.

a) Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience.
b) Déterminer la probabilité que l'histoire ne revienne pas à son inventeur.

c) Déterminer la probabilité que l'histoire ne soit pas racontée deux fois à une même personne.

Ex 11. Soient a et b deux réels strictement compris entre 0 et 1 et g la fonction à valeurs positives définies sur $\mathbb{N}^2$ par : $\forall(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ g(i,j) = ab(1-a)^i(1-b)^j$.

1. Vérifier que g caractérise une probabilité notée P sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$. Rappeler l'expression de $P(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i+j=n\}$. Montrer que l'application f définie par, $f(n) = P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, caractérise une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ que l'on notera P_1. Calculer $P_1(\{n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient $B = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i=j\}$, $C = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i>j\}$ et $D = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i<j\}$. Calculer $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$.

Entrainement supplémentaire facultatif :

Ex 12. Montrer que la famille $(x_{k,l})_{(k,l)\in\mathbb{N}^{*2}}$ indexée par $\mathbb{N}^{*2}$ et définie par

$$\forall(k,l) \in \mathbb{N}^{*2},\ x_{k,l} = \frac{(-1)^{kl}}{k^2l^2}$$

est sommable.
En utilisant que $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$ calculer sa somme Σ.
Indication : on écrira Σ à l'aide des deux sommes $S_1 = \sum\limits_{k\in I} \frac{1}{k^2}$ et $S_2 = \sum\limits_{k\in P} \frac{1}{k^2}$ où I désigne l'ensemble des entiers impairs et P l'ensemble des entiers pairs.