Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Propositions de sujet de « cours » pour les séances d'oral

Chapitre I : Dénombrer et sommer

1. Construction d'une bijection entre $[0, 1[$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ (exemple 1.39 du poly p.17),
2. *(vous pouvez vous mettre à deux sur un tel sujet et l'exposer à deux en 40 mn)* Démonstration de l'une des implications entre convergence absolue et convergence commutative d'une série a termes réels ou complexes (Théorème 1.68 et 1.76 du poly p.25-26 et p.29-30).

Chapitre II : Evénements et probabilités

1. Démonstration de la propriété de continuité monotone séquentielle d'une probabilité (proposition 2.16 propriétés 6 et 7 du poly p.59-62),
2. Démonstration de la formule de Poincaré (proposition 2.18 du poly p.63-64),
3. Démonstration de la règle du conditionnement successif et de la formule de Bayes (propositions 2.38 et 2.39 du poly p.76-77) avec des exercices d'application dans la fiche 2a de M206 2005-2006.
4. Deux méthodes pour calculer la probabilité de l'événement "la premiere obtention d'un 9 a lieu avant la premiere obtention d'un 7" dans une suite infinie de lancers d'une paire de dés (exercice 11 de la fiche 2a M206 2005-2006 et dans le poly : section 2.2.3 une question de dés p.55-58 et exemple 2.43 p.79). *On peut éventuellement réfléchir à une généralisation de ce résultat.*
5. Démonstration des propriétés de la fonction de répartition (proposition 2.28 du poly p.68-70).

Chapitre III : Variables aléatoires réelles

1. Démonstration de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson (théorème 3.37 et exemple 3.38 du poly p. 105-106).
2. Démonstration de l'approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale (théorème 3.33 du poly p. 102).

3. Sur le caractère universel de la loi de Poisson (section 3.3.7 p. 109-112) *(vous pouvez vous mettre à deux sur un tel sujet et l'exposer à deux en 40 mn).*
4. Démonstration de la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle (théorème 3.45 du poly p. 115).
5. Démonstration de convergence de l'intégrale généralisée de la densité de la loi normale centrée réduite (exemple B.30 p. 246 du poly) et démonstration de l'encadrement de la fonction de répartition Φ donné p. 258 du poly.

Chapitre IV : Espérance

Les sujets d'oraux sur ce chapitre qui sont proposés, sont des résultats sur l'intégrale de Riemann (que l'on n'a pas le temps de traiter en cours et qui sont pour la plupart des rappels excepté le Théorème A.34 p. 227). Il y a également des points du cours qui sont difficiles, traités en cours mais que cours pouvez reprendre en sujet d'oral comme :

1. Toute variable aléatoire positive est limite simple d'une suite croissante de variables aléatoires étagées positives (Théorème 4.21 p. 133).
2. Théorème de Beppo Levi (Théorème 4.23 et Lemme 4.22 p. 134-135).
3. Corollaires du Théorème de Beppo Levi (Corallaire 4.26 et Corollaire 4.27 p. 138-139).
4. Calcul de l'espérance $\mathbf{E}(X)$ lorsque X est à densité (Proposition 4.32 p. 142).
5. Calcul de l'espérance $\mathbf{E}h(X)$ lorsque X est une v.a. discrète et h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ borélienne (Proposition 4.41 p. 148).
6. Calcul direct des moments d'ordre r ($r \geq 0$) d'une variable aléatoire à densité (preuve directe de la proposition 4.40 sans utiliser la proposition 4.42).
7. *(vous pouvez vous mettre à deux sur un tel sujet et l'exposer à deux en 40 mn)* Calcul de l'espérance $\mathbf{E}h(X)$ lorsque X est une v.a. à densité et h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ réglée sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ (Proposition 4.42 p. 149).

Annexe A : Intégrale de Riemann

1. Definition de l'intégrale de Riemann et intégrabilité d'une fonction monotone sur un intervalle (définition A.1. p. 204 et proposition A.9 p. 211).
2. Interversion limite intégrale (Théorème A.33 p. 226 : convergence uniforme d'une suite de fonctions).
3. Interversion limite intégrale (Théorème A.34 p. 227 : convergence simple d'une suite de fonctions toutes décroissantes).

Annexe B : Intégrale généralisée

1. Un exemple d'une fonction qui n'a pas de limite en $+\infty$ mais dont l'intégrale généralisée converge (remarque B.16 p. 236-238 du poly).

2. Sur les intégrales généralisées de fonctions positives équivalentes en $+\infty$: demonstration du théorème B.33 p. 246-247 suivi de l'exemple B.40 p. 249 du poly.
3. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour des fonctions Riemann intégrables sur un intervalle $[a, b]$ (proposition A.27 p. 221-222 du poly) et généralisation aux intégrales généralisées (proposition B.48 p. 256 du poly).

Les références au poly sont celles liées à la version d'octobre 2006.