Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

S4–M 206 **Année 2007–2008**

Probabilités, Fiche 4a

Espérance et variance

Ex 1. 1) On lance un dé. On désigne par X le nombre obtenu avec ce dé. Déterminer l'espérance de X.

2) Calculer l'espérance de la somme obtenue en lançant trois dés.

Ex 2. Deux voyageurs A et B prennent le train. On leur a dit que, dans la gare d'arrivée, il n'y a qu'une sortie. Mais ils ignorent si elle se situe en tête, en queue, ou au milieu du train. A décide de voyager au milieu du train, et B en tête de train. En prenant comme unité la longueur du quai, on appelle X la distance que A aura à parcourir jusqu'à la sortie et Y celle que B parcourra (vous admettrez que les longueurs du quai et du train sont les mêmes). Comparer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Ex 3. Soit n entier ≥ 1 et $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante :

Si $X = k$ et $k \geq 1$ alors $Y = k$; si $X = 0$ alors Y prend une valeur au hasard dans $\{1,\ldots,n\}$.

Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

Ex 4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ. Déterminer les lois de $X+Y$ et de $2X$. Calculer leur espérance.

Ex 5. La loi de la variable aléatoire X est une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{E}(2^X)$.

Ex 6. **Lire une petite loi**

Voici la loi de la variable aléatoire V :

$V(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et

k	0	1	2	3
$P(V=k)$	0,35	0,30	0,25	0,10

1) Justifier pourquoi la variable aléatoire V a des moments de tous ordres.

2) Calculer l'espérance de V.

3) Calculer sa variance.

4) Calculer $E\Big((V-1)^3\Big)$.

5) Tracer le graphe de la fonction de répartition F_V de V.

Ex 7. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient, pour un $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \forall j \in \mathbb{N} \qquad P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{a^i}{j!}$$

1) Calculer a.

2) Déterminer la loi de X et celle de Y, et donner les noms de ces lois. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3) On note $S = X + Y$. Donner *sans calcul* l'espérance et la variance de S.

Ex 8. Brioches aux raisins

Un boulanger mélange 1000 raisins dans de la pâte pour fabriquer 100 brioches de même masse.

1) Quelle est la loi exacte du nombre X de raisins contenus dans une brioche achetée chez ce boulanger ? Précisez quelles hypothèses vous faites. Donnez sans calcul l'espérance et la variance de X.

2) En utilisant une *approximation* classique de la loi de X, évaluer la probabilité que la brioche achetée contienne 10 raisins à deux unités près (i.e. $8 \leq X \leq 12$).

3) En utilisant l'inégalité de Tchebycheff, *majorer* la probabilité que la brioche achetée ne contienne pas plus de 3 ou au moins 17 raisins.

Ex 9. Les deux trains.

Après un match important, 1400 supporters se rendent à la gare où deux trains spéciaux les attendent. Chaque supporter, indépendamment, choisit au hasard un des trains, y monte, et n'a plus le temps d'en changer avant le départ.

Si chaque train contient exactement 700 places assises, il est probable que des supporters voyageront debout, aussi a-t-on décidé que chacun des deux trains contiendrait $700+n$ places assises. On veut déterminer le nombre n de places supplémentaires à prévoir.

1) On note X le nombre de personnes qui montent dans le train stationné à gauche du quai, et Y le nombre de personnes qui montent dans l'autre. Donner les lois de X et Y, leurs espérances et leurs variances. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2) Chaque train contient $700 + n$ places assises. En utilisant la variable X, exprimer l'évènement

$$E = \{\text{au moins un des 1400 supporters est obligé de voyager debout}\}$$

Majorer la probabilité de E en utilisant l'inégalité de Tchebychev.

3) En déduire une valeur de n suffisante pour avoir au moins 95% de chances que tous puissent s'asseoir. On choisira n le plus petit possible, car il n'est pas rentable de faire voyager un grand nombre de places vides.

Les quatre exercices suivants ne sont pas destinés à être traités en TD. Certains ne portent pas sur les notions (espérance et variance) à étudier lors des dernières séances de TD. Ils sont là comme exercices de révisions, pour ceux qui souhaitent vérifier que leurs connaissances sont assez solides pour résoudre des exercices ordinaires en un temps raisonnable.

Devoir surveillé de Probabilité et Analyse Numérique **24 mai 2007**

Partie I : Probabilités

Ex 10.

Devant un feu de signalisation passent, sur une seule file, trois types de véhicules, dans les proportions suivantes :

- 70% de voitures
- 25% de camions
- 5% de semi-remorques

Les voitures ont une longueur de 5 m, les camions de 10 m et les semi-remorques de 20 m. Trois véhicules s'arrêtent au feu rouge. On appelle L la variable aléatoire égale à la longueur totale de chaussée qu'ils occupent. Calculer $\mathbb{E}(L)$.

Ex 11. Un système mécanique est formé de 200 composants. Tous les composants ont la même probabilité 0.005 de tomber en panne. Le fait qu'un composant tombe ou non en panne est indépendant de l'état des autres. Le système lui-même continue à fonctionner tant qu'il n'y a pas au moins deux composants en panne. On appelle S la variable aléatoire égale au nombre de composants en panne à un instant donné.

1) Quelle est la loi de S ?

2) Par quelle autre loi peut-on l'approcher, et pourquoi ?

3) En déduire une valeur approchée de la probabilité que le système cesse de fonctionner à un moment donné (on prendra 0.368 comme valeur approchée de e^{-1})

Ex 12. On sait que, pendant une journée, le nombre de personnes entrant dans un bureau de poste donné est une variable aléatoire N d'espérance 60.

1) Que peut-on dire de la probabilité qu'aujourd'hui, au moins 100 personnes entrent dans ce bureau de poste ?

2) Que peut-on dire de cette probabilité si on suppose en plus que la variance de N est égale à 20 ?

Ex 13. Est-il vrai que pour toute variable aléatoire X qui ne s'annule jamais, $\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$? (Justifiez brièvement votre réponse en choisissant judicieusement une variable aléatoire qui prend un nombre fini de valeurs).